氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

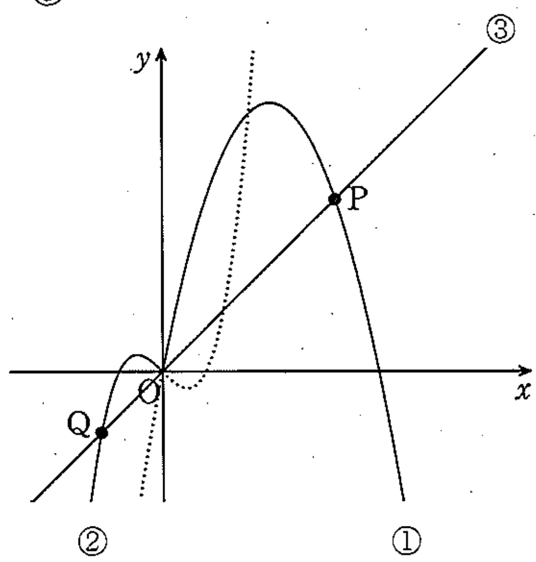
受験番号

評点欄

1

1

$$f(x)=\begin{cases} x(5-x) & (x\geqq 0) \quad \cdots ① \\ x(x^2-1) & (x<0) \quad \cdots ② \end{cases} \qquad y=ax \quad \cdots ③$$



(1) 点 P の x 座標は①，③より

$x(5-x)=ax$

$x=0,\ 5-a$

点 P の x 座標は正なので

$5-a>0 \qquad \therefore\ a<5$

点 Q の x 座標は②，③より

$x^3-x=ax$

$x=0,\ \pm\sqrt{a+1}$

点 Q の x 座標は負なので

$-\sqrt{a+1}<0 \qquad \therefore\ a>-1$

以上より，求める a の値の範囲は　　$-1<a<5$

(2)
$$\begin{aligned} S_1(a)&=\int_0^{5-a}\{x(5-x)-ax\}dx \\ &=-\int_0^{5-a}x\{x-(5-a)\}dx \\ &=\frac{1}{6}(5-a)^3 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} S_2(a)&=\int_{-\sqrt{a+1}}^{0}\{(x^3-x)-ax\}dx \\ &=\int_{-\sqrt{a+1}}^{0}\{x^3-(a+1)x\}dx \\ &=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}(a+1)x^2\right]_{-\sqrt{a+1}}^{0} \\ &=\frac{1}{4}(a+1)^2 \end{aligned}$$

(4)
$$S(a)=\frac{1}{6}(5-a)^3+\frac{1}{4}(a+1)^2$$
$$\begin{aligned} S'(a)&=-\frac{1}{2}(5-a)^2+\frac{1}{2}(a+1) \\ &=-\frac{1}{2}(a-3)(a-8) \end{aligned}$$

$-1<a<5$ における増減表は次のようになる

a	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$	

増減表より，$S(a)$ の最小値は　　$S(3)=\dfrac{16}{3}$

氏　名

数 学 解 答 紙 〔その二〕

受験番号

2

評点欄

2

(1) 接点の x 座標を t とする。

曲線 C の $x=t$ における接線の方程式は

$C: y'=\dfrac{1}{x}$ から

$y-\log t=\dfrac{1}{t}(x-t)$　　∴　$y=\dfrac{1}{t}x-1+\log t$ である。

これが $y=ax+b$ と一致するので，係数比較して

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{t} & \cdots\cdots ① \\ b=-1+\log t & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，$t=\dfrac{1}{a}$

これを②に代入して，$b=-1-\log a$ となる。

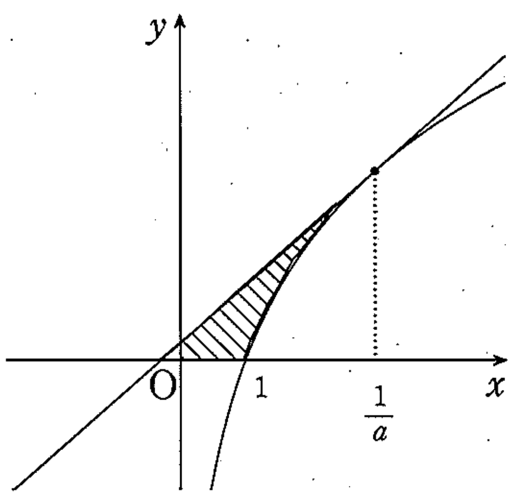
(2) $0<a<1$ より，$t=\dfrac{1}{a}>1$ である。

よって直線 l と曲線 C の位置関係は図のようになる。

$$S=\left(\frac{1}{a}-\frac{\log a+1}{a}\right)\cdot(-\log a)\cdot\frac{1}{2}-\int_1^{\frac{1}{a}}\log x\,dx$$

$$=\frac{(\log a)^2}{2a}-\Big[x\log x-x\Big]_1^{\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{(\log a)^2}{2a}+\frac{\log a}{a}+\frac{1}{a}-1$$



氏　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

3

評点欄

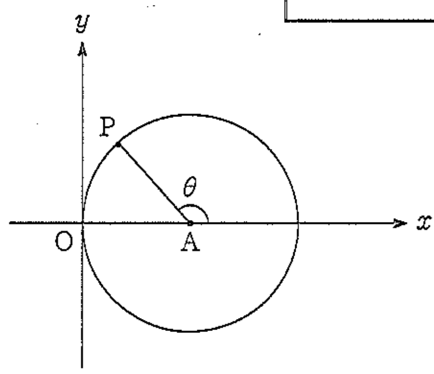
3

(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=(1,0,0)+(\cos\theta,\sin\theta,0)$

$=(1+\cos\theta,\sin\theta,0)$

よって，点Pの座標は，$(1+\cos\theta,\sin\theta,0)$となる。



(2) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+t(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})$

$=(1,0,1)+t(\cos\theta,\sin\theta,-1)$

$=(1+t\cos\theta,t\sin\theta,1-t)$　……①

点Qはyz平面上なので，$1+t\cos\theta=0$　$\therefore$　$t=-\dfrac{1}{\cos\theta}$

これを①に代入することで点Qの座標は$\left(0,-\tan\theta,1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)$となる。

(3) $Q(0,Y,Z)$とおくと，(2)より　$Y=-\tan\theta$，$Z=1+\dfrac{1}{\cos\theta}$

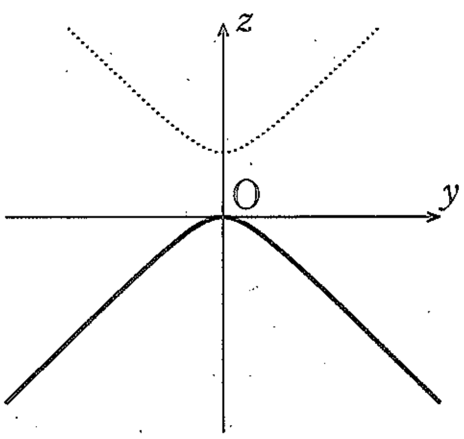
$\therefore$　$\tan\theta=-Y$　　$\dfrac{1}{\cos\theta}=Z-1$

これを$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$に代入して整理すると，　$Y^2-(Z-1)^2=-1$

を得る。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$であるから，　$Z=1+\dfrac{1}{\cos\theta}$より，$Z\leqq 0$

よって点Qの軌跡の方程式は　$x=0,\ y^2-(z-1)^2=-1\ (z\leqq 0)$

これを図示すると下図のようになる。



氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その四〕

受験番号

評 点 欄

4

4

(1)　硬貨を2回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，2回とも裏が出たときなので

$$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

また，硬貨を3回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，1回目と2回目に表が出て，3回目に裏が出たときなので

$$p_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(2)　頂点Aから出発して，頂点Dに止まらずちょうど一周して頂点Aに到着する事象のうち，硬貨をちょうど2回投げて到着するものをS，硬貨をちょうど3回投げて到着するものをTとする。事象S，Tの起こる確率は(1)の結果より，それぞれ$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$となる。

硬貨を4回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，事象Sが2回起こるときなので

$$p_4=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

硬貨を5回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，事象S，Tがそれぞれ1回ずつ起こるときなので

$$p_5={}_2C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

(3)　硬貨を12回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，

- 事象Sが6回
- 事象Sが3回，事象Tが2回
- 事象Tが4回

の3通りが考えられるので，求める確率は

$$p_{12}=\left(\frac{1}{4}\right)^6+{}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{3}{1024}$$