令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ 　よって $(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$ より $\frac{1}{4}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

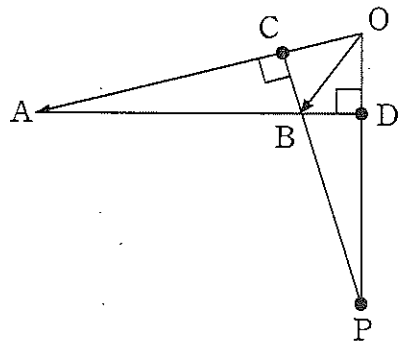
したがって $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2=\frac{1}{4}\cdot16=4$ …答

(2) $\overrightarrow{OD}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると，点 D は直線 AB 上の点なので $s+t=1$ …①

また，$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{AB}$ より

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
$$\overrightarrow{OD}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$$
$$(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$
$$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$
$$4s-16s+2t-4t=0$$

整理すると $6s+t=0$ …②



①，②を解くと $s=-\frac{1}{5}$，$t=\frac{6}{5}$ …答

したがって，$\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{6}{5}\vec{b}$ より

$$|\overrightarrow{OD}|^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2|-\vec{a}+6\vec{b}|^2=\frac{1}{25}(|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+36|\vec{b}|^2)=\frac{1}{25}(16-12\cdot4+36\cdot2)=\frac{8}{5}$$

$|\overrightarrow{OD}|>0$ なので $|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{\frac{8}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ …答

(3) 3点 O，D，P は同一直線上の点なので，実数 k を用いて $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OD}$ と表せる。

よって，$\overrightarrow{OP}=k\left(-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{6}{5}\vec{b}\right)=-\frac{1}{5}k\vec{a}+\frac{6}{5}k\vec{b}$ …③

また，3点 C，B，P は同一直線上の点なので，実数 ℓ を用いて $\overrightarrow{CP}=\ell\overrightarrow{CB}$ と表せる。

よって，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=\ell(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$ より $\overrightarrow{OP}=\ell\overrightarrow{OB}+(1-\ell)\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}(1-\ell)\vec{a}+\ell\vec{b}$ …④

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なので，③，④より

$-\frac{1}{5}k=\frac{1}{4}(1-\ell)$，$\frac{6}{5}k=\ell$ より，これを解くと $k=\frac{5}{2}$，$\ell=3$

よって，$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{2}\overrightarrow{OD}$ より $|\overrightarrow{OP}|=\frac{5}{2}|\overrightarrow{OD}|=\frac{5}{2}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}=\sqrt{10}$ …答

氏　名

数学解答紙〔その２〕

受験番号

評点欄

2

2

・出た目が奇数のとき、x軸の正の向きに1だけ動く事象をA

・出た目が2または4のとき、x軸の負の向きに1だけ動く事象をB

・出た目が6のとき、y軸の正の向きに1だけ動く事象をC　とおく。

(1). さいころをn回投げて、点Pの座標が$(1, n-1)$となるとき。

n回中Aが1回 Cがn−1回起こるので、

$$_nC_1 \times 3 = 3n$$

$\therefore$ 3n通り

(2). さいころをn回投げて、点Pの座標が$(0, n-2)$となるとき。

n回中Aが1回, Bが1回, Cがn−2回起こるので、

$$\frac{n!}{(n-2)!} \times 3 \times 2 = 6n(n-1)$$

$\therefore$ $6n(n-1)$通り

(3). さいころをn回投げて、点Pのx座標が0以上かつy座標がn−2以上となるとき、次の4通りに分けられる。

i). n回中n回すべてC　1通り

ii). n回中Aが1回, Cがn−1回
(1)より　3n通り

iii). n回中Aが1回, Bが1回, Cが$(n-2)$回
(2)より　$6n(n-1)$通り

iv) n回中Aが2回 Cが$(n-2)$回

$$_nC_2 \times 3^2 = \frac{9}{2}n(n-1)\text{通り}$$

したがって、i)〜iv)より

$$1 + 3n + 6n(n-1) + \frac{9}{2}n(n-1)$$

$$= \frac{21}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 1$$

$\therefore$ $\frac{21}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 1$通り

令和6年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その3〕

受験番号

評点欄

3

3

(1). 定義域は $x \geqq 0$.

$y' = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} > 0$

$y'' = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)' \cdot e^{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} (e^{\sqrt{x}})'$

$= -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{4x} \cdot e^{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$

$y'' = 0$ とすると. $x = 1$.

x	0	…	1	…
y'	／	+	+	+
y''	／	−	0	+
y	1	↗	e	↗

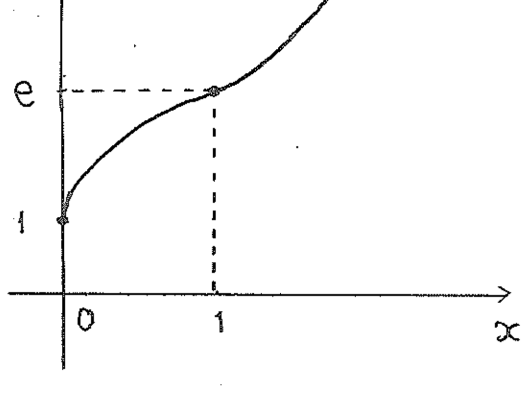
$0 < x < 1$ で. 上に凸

$1 < x$ で. 下に凸

変曲点は. 点 $(1, e)$.

また. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} e^{\sqrt{x}} = \infty$

概形は.



(2). $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $g(x) = kx$ とすると.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$, $g'(x) = k$.

点Pの x 座標を t とすると.

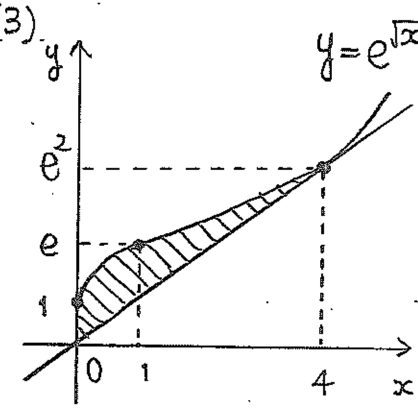
$t \geqq 0$ であり.

$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} e^{\sqrt{t}} = kt \\ \dfrac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} = k \end{cases}$

これを解いて. $t = 4$, $k = \dfrac{e^2}{4}$

$\therefore k = \dfrac{e^2}{4}$, $P(4, e^2)$

(3)



$y=\dfrac{e^2}{4}x$

曲線と直線の概形は左のようになり.

$0 \leqq x \leqq 4$ で

$e^{\sqrt{x}} \geqq \dfrac{e^2}{4}x$ なので.

求める面積を S とすると.

$S = \displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx - \frac{1}{2} \cdot 4e^2$

ここで. $t = \sqrt{x}$ とおくと.

$t^2 = x$ より.

$dx = 2t\,dt$

x	$0 \to 4$
t	$0 \to 2$

よって. $S = \displaystyle\int_0^2 e^t 2t\,dt - 2e^2$

$= \left[2te^t\right]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 2e^t dt - 2e^2$

$= 4e^2 - \left[2e^t\right]_0^2 - 2e^2$

$= 4e^2 - (2e^2 - 2) - 2e^2$

$= 2$.　　$\therefore$ 求める面積は. 2

氏　名

数学解答紙〔その４〕

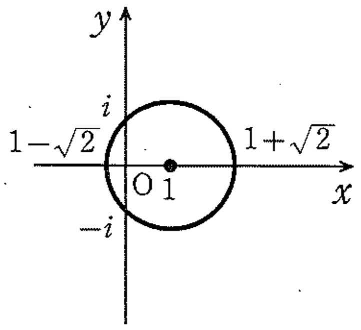
受験番号

4

評点欄

④

(1)　① を満たす点 z の全体は，中心 1，半径 $\sqrt{2}$ の円を表す。(図は下図)



② を満たす点 z は中心 α，半径 $\sqrt{5}$ の円周上にある。

2 つの円の中心間の距離は $|\alpha-1|$ であり，$|\alpha|=2$ であるから，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，$|\alpha-1|^2=(2\cos\theta-1)^2+(2\sin\theta)^2=5-4\cos\theta$ となるので，$1\leqq|\alpha-1|\leqq 3$

よって　$\sqrt{5}-\sqrt{2}<|\alpha-1|<\sqrt{5}+\sqrt{2}$　となり，2 円は共有点を 2 個もつ。

よって ①，② を満たす複素数 z の個数は 2 個である。

(2)　① より　$|z-1|^2=2$　これより　$(z-1)(\overline{z}-1)=2$　∴　$z\overline{z}-\overline{z}-z-1=0$　…③

同様に ② より　$z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z-1=0$　…④

③−④ より　$\overline{z}(\alpha-1)+z(\overline{\alpha}-1)=0$

(3)　(2) より β，γ は　$\overline{z}(\alpha-1)+z(\overline{\alpha}-1)=0$　…⑤　が表す図形上にある。

$w=z(\overline{\alpha}-1)$ とおくと，⑤ より $\overline{w}+w=0$ となるので，w は虚軸上にある。

よって $w=ki$ (k は実数) とおける。

このとき　$z=k\dfrac{i}{\overline{\alpha}-1}$　となるので，z は原点を通る直線上にある。

これより，B，C，O は一直線上にある。

(別解)　⑤ において　$z=x+yi$，$\alpha=a+bi$　とおくと

$(x-yi)(a+bi-1)+(x+yi)(a-bi-1)=0$

$2(a-1)x+2by=0$　つまり　$(a-1)x+by=0$

この直線は原点を通るので，B，C，O は一直線上にある。

ここで ① の円は i，$-i$ を通るので，これらを D，E とおくと，方べきの定理より

$\mathrm{OB}\times\mathrm{OC}=\mathrm{OD}\times\mathrm{OE}$

$b\times|\gamma|=1\times1$

∴　$|\gamma|=\dfrac{1}{b}$