令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$　よって　$(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$\left(\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0$ より $\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

したがって　$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$　…答

(2) $\overrightarrow{OD} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とすると，点 D は直線 AB 上の点なので　$s + t = 1$　…①

また，$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

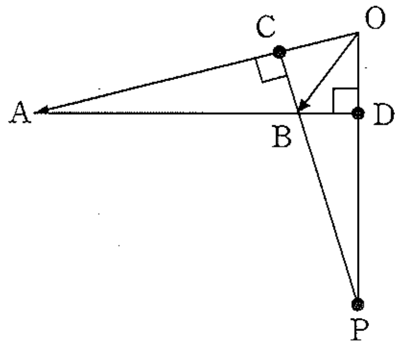
$\overrightarrow{OD} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$

$(s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

$s\vec{a} \cdot \vec{b} - s|\vec{a}|^2 + t|\vec{b}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$4s - 16s + 2t - 4t = 0$

整理すると　$6s + t = 0$　…②



①，② を解くと　$s = -\frac{1}{5}$，$t = \frac{6}{5}$　…答

したがって，$\overrightarrow{OD} = -\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$ より

$|\overrightarrow{OD}|^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 |-\vec{a} + 6\vec{b}|^2 = \frac{1}{25}(|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 36|\vec{b}|^2) = \frac{1}{25}(16 - 12 \cdot 4 + 36 \cdot 2) = \frac{8}{5}$

$|\overrightarrow{OD}| > 0$ なので　$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$　…答

(3) 3 点 O，D，P は同一直線上の点なので，実数 k を用いて $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OD}$ と表せる。

よって，$\overrightarrow{OP} = k\left(-\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}\right) = -\frac{1}{5}k\vec{a} + \frac{6}{5}k\vec{b}$ …③

また，3 点 C，B，P は同一直線上の点なので，実数 ℓ を用いて $\overrightarrow{CP} = \ell\overrightarrow{CB}$ と表せる。

よって，$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = \ell(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$ より $\overrightarrow{OP} = \ell\overrightarrow{OB} + (1-\ell)\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}(1-\ell)\vec{a} + \ell\vec{b}$ …④

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なので，③，④ より

$-\frac{1}{5}k = \frac{1}{4}(1-\ell)$，$\frac{6}{5}k = \ell$　より，これを解くと　$k = \frac{5}{2}$，$\ell = 3$

よって，$\overrightarrow{OP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OD}$　より　$|\overrightarrow{OP}| = \frac{5}{2}|\overrightarrow{OD}| = \frac{5}{2} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{5} = \sqrt{10}$　…答

令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数学解答紙〔その２〕

氏名

受験番号

評点欄

②

2

・出た目が奇数のとき、x軸の正の向きに1だけ動く事象をA

・出た目が2または4のとき、x軸の負の向きに1だけ動く事象をB

・出た目が6のとき、y軸の正の向きに1だけ動く事象をC とおく。

(1). さいころをn回投げて、点Pの座標が$(1, n-1)$となるとき。

n回中Aが1回 Cがn−1回起こるので、

$${}_nC_1 \times 3 = 3n$$

$\therefore$ 3n通り

(2). さいころをn回投げて、点Pの座標が$(0, n-2)$となるとき。

n回中Aが1回, Bが1回, Cがn−2回起こるので、

$$\frac{n!}{(n-2)!} \times 3 \times 2 = 6n(n-1)$$

$\therefore$ $6n(n-1)$通り

(3). さいころをn回投げて、点Pのx座標が0以上かつy座標がn−2以上となるとき、

次の4通りに分けられる。

i). n回中n回すべてC　1通り

ii). n回中Aが1回, Cがn−1回

(1)より　3n通り

iii). n回中Aが1回, Bが1回, Cが$(n-2)$回

(2)より　$6n(n-1)$通り

iv) n回中Aが2回 Cが$(n-2)$回

$${}_nC_2 \times 3^2 = \frac{9}{2}n(n-1)\text{通り}$$

したがって、i)〜iv)より

$$1 + 3n + 6n(n-1) + \frac{9}{2}n(n-1)$$

$$= \frac{21}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 1$$

$\therefore$ $\frac{21}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 1$通り

令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数学解答紙〔その３〕

氏名

受験番号

評点欄

3

3

(1). $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, $g(x)=kx$ とすると

$f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$ である.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$, $g'(x)=k$.

点Pの x 座標を t とすると,

$t \geqq 0$ であり,

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} e^{\sqrt{t}}=kt \\ \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}=k \end{cases}$$

これを解いて, $t=4$, $k=\frac{e^2}{4}$

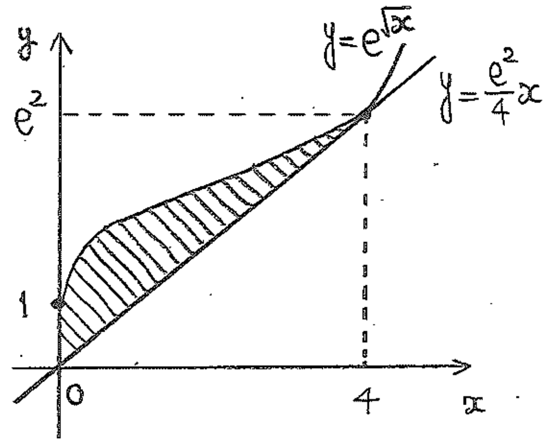
$\therefore k=\frac{e^2}{4}$, $P(4, e^2)$

(2). $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}>0$.

よって $f(x)$ は単調に増加する.

また, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

曲線と直線の概形は次のようになる.



$0 \leqq x \leqq 4$ で, $e^{\sqrt{x}} \geqq \frac{e^2}{4}x$ なので,

求める面積を S とすると,

$$S=\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot e^2$$

ここで, $t=\sqrt{x}$ とおくと

$t^2=x$ より

$dx=2t\,dt$

x	$0 \longrightarrow 4$
t	$0 \longrightarrow 2$

よって, $S=\int_0^2 e^t\cdot 2t\,dt-2e^2$

$=\left[2t\cdot e^t\right]_0^2-\int_0^2 2e^t\,dt-2e^2$

$=4e^2-\left[2e^t\right]_0^2-2e^2$

$=4e^2-(2e^2-2)-2e^2$

$=2$

$\therefore$ 求める面積は, 2

令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その４〕

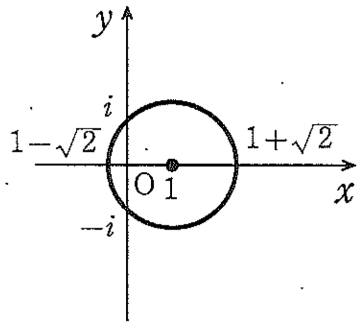
受験番号

評点欄

④

4

(1)　① を満たす点 z の全体は，中心 1，半径 $\sqrt{2}$ の円を表す。(図は下図)



② を満たす点 z は中心 α，半径 $\sqrt{5}$ の円周上にある。

2 つの円の中心間の距離は $|\alpha-1|$ であり，$|\alpha|=2$ であるから，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，$|\alpha-1|^2=(2\cos\theta-1)^2+(2\sin\theta)^2=5-4\cos\theta$ となるので，$1\leqq|\alpha-1|\leqq3$

よって　$\sqrt{5}-\sqrt{2}<|\alpha-1|<\sqrt{5}+\sqrt{2}$　となり，2 円は共有点を 2 個もつ。

よって ①，② を満たす複素数 z の個数は 2 個である。

(2)　① より　$|z-1|^2=2$　これより　$(z-1)(\overline{z}-1)=2$　∴　$z\overline{z}-\overline{z}-z-1=0$　…③

同様に ② より　$z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z-1=0$　…④

③−④ より　$\overline{z}(\alpha-1)+z(\overline{\alpha}-1)=0$

(3)　(2) より β，γ は　$\overline{z}(\alpha-1)+z(\overline{\alpha}-1)=0$　…⑤　が表す図形上にある。

$w=z(\overline{\alpha}-1)$ とおくと，⑤ より $\overline{w}+w=0$ となるので，w は虚軸上にある。

よって $w=ki$ (k は実数) とおける。

このとき　$z=k\dfrac{i}{\overline{\alpha}-1}$　となるので，z は原点を通る直線上にある。

これより，B，C，O は一直線上にある。

(別解)　⑤ において　$z=x+yi$，$\alpha=a+bi$　とおくと

$(x-yi)(a+bi-1)+(x+yi)(a-bi-1)=0$

$2(a-1)x+2by=0$　つまり　$(a-1)x+by=0$

この直線は原点を通るので，B，C，O は一直線上にある。

ここで ① の円は i，$-i$ を通るので，これらを D，E とおくと，方べきの定理より

OB×OC＝OD×OE

$b\times|\gamma|=1\times1$

∴　$|\gamma|=\dfrac{1}{b}$