令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1). 3つのさいころを同時に投げるときの

全事象は $6^3=216$ 通り

このとき、出た目の和が15以上となる

組みあわせは、

(6,6,6), (6,6,5), (6,6,4), (6,6,3)

(6,5,5), (6,5,4), (5,5,5) である

出た目の順を考えて、

$1+3+3+3+3+6+1=20$ 通り

ゆえに、求める確率は、$\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$

(2). (1)より 出た目の合計が14以下となるのは、

$1-\frac{5}{54}=\frac{49}{54}$

出た目の合計が14以下 かつ

1の目が出たさいころが少なくとも1つ

ある確率は、少なくとも1回1が出る

確率と同じなので、

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$

以上より、求める条件つき確率は、

$\frac{\frac{91}{216}}{\frac{49}{54}}=\frac{91}{196}=\frac{13}{28}$

(3).

出た目の積が4の倍数と

ならない場合は、次の2通りある

i) 出た目がすべて奇数のとき、

$3^3=27$ 通り

ii) 出た目の2つが奇数で、残りの1つが

2または6の目のとき、

$3^2\times2\times3=54$ 通り

これらより、出た目の積が

4の倍数にならない場合の数は

$27+54=81$ 通り

よって、出た目の積が4の倍数に

なる場合の数は、

$216-81=135$ 通り

以上より、求める確率は、

$\frac{135}{216}=\frac{5}{8}$

氏　　名

数学解答紙〔その2〕

受験番号

評点欄

2

2

(1)　$\alpha=\sqrt{\alpha+2}$ において，$\alpha+2\geqq 0$ かつ $\alpha\geqq 0$　よって　$\alpha\geqq 0$

このとき，両辺を2乗すると　$\alpha^2=\alpha+2$　$\therefore \alpha=2$　($\because \alpha\geqq 0$)　…答

(2)　[1]　$n=1$ のとき

$a_1=100$，$a_2=\sqrt{102}$ なので　$100>\sqrt{102}>2$　より成立する。

[2]　$n=k$ のとき　($k\geqq 1$ の自然数)

$a_k>a_{k+1}>2$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+2}-2=\sqrt{a_{k+1}+2}-2=\frac{(\sqrt{a_{k+1}+2}-2)(\sqrt{a_{k+1}+2}+2)}{\sqrt{a_{k+1}+2}+2}=\frac{a_{k+1}-2}{\sqrt{a_{k+1}+2}+2}>0$$

$$a_{k+1}-a_{k+2}=a_{k+1}-\sqrt{a_{k+1}+2}=\frac{(a_{k+1}-\sqrt{a_{k+1}+2})(a_{k+1}+\sqrt{a_{k+1}+2})}{a_{k+1}+\sqrt{a_{k+1}+2}}$$

$$=\frac{(a_{k+1}-2)(a_{k+1}+1)}{a_{k+1}+\sqrt{a_{k+1}+2}}>0$$

よって，$a_{k+1}>a_{k+2}>2$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，$a_n>a_{n+1}>2$ が成立する。

(3)　$a_2=\sqrt{102}$ より　$10<a_2<11$　である。

$a_3=\sqrt{a_2+2}$ であり，$12<a_2+2<13$ より　$\sqrt{12}<a_3<\sqrt{13}$　つまり　$3<a_3<4$

$a_4=\sqrt{a_3+2}$ であり，$5<a_3+2<6$ より　$\sqrt{5}<a_4<\sqrt{6}$　つまり　$2<a_4<3$

$n\geqq 5$ のとき，(2) より $a_4>a_n$ なので　$a_n<3$

よって，$a_n>3$ となる最大の自然数 n は　$n=3$　…答

(4)　$$a_{n+1}-\alpha=a_{n+1}-2=\sqrt{a_n+2}-2=\frac{(\sqrt{a_n+2}-2)(\sqrt{a_n+2}+2)}{\sqrt{a_n+2}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}(a_n-2)<\frac{1}{4}(a_n-2)\quad(\because a_n>2)$$

また，これより $n\geqq 2$ のときこの変形を繰り返し用いると

$a_n>2$ と $a_1-2=98$ から　$0<a_n-2<98\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ であり，$\lim_{n\to\infty}98\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=0$ なので

はさみうちの原理より　$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

したがって，$\lim_{n\to\infty}a_n=2$ が成立する。

氏　名

数学解答紙〔その３〕

受験番号

評点欄

3

3

(1) $3+i=\sqrt{10}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{i}{\sqrt{10}}\right)$ より $3+i$ の偏角を θ とおくと

$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{i}{\sqrt{10}}$ である。

これより　$w=z\times(\cos\theta+i\sin\theta)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{i}{\sqrt{10}}\right)z$

(2) (1) の θ を用いて点 z を原点のまわりに $-\theta$ だけ回転させた点を表す複素数を u とおくと　$u=z\times\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

点 u を実軸に関して対称移動させた点を表す複素数は

$\overline{u}=\overline{z\times\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}}=\overline{z}\times(\cos\theta+i\sin\theta)$

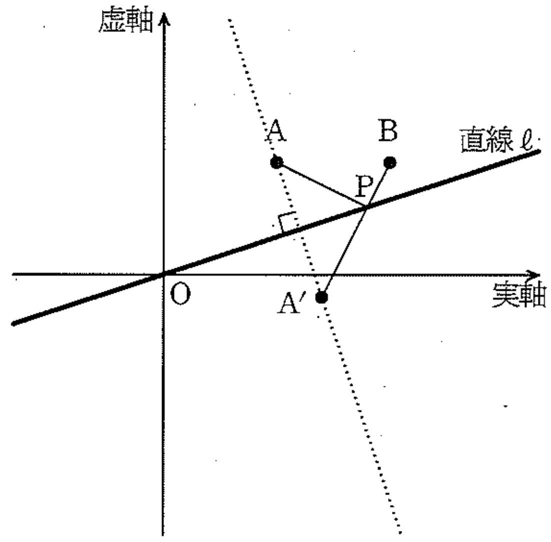
点 z' は，点 $\overline{u}$ を原点のまわりに (1) の θ だけ回転した点であるから

$z'=\overline{z}\times(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos\theta+i\sin\theta)=\overline{z}\times(\cos\theta+i\sin\theta)^2$

ここで　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{i}{\sqrt{10}}$　なので，$z'=\overline{z}\times\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{i}{\sqrt{10}}\right)^2=\dfrac{4+3i}{5}\overline{z}$　となる。

(3) 直線 ℓ に関して点Aと対称な点を $A'(\alpha)$ とすると，

(2) より　$\alpha=\dfrac{4+3i}{5}\times\overline{1+i}=\dfrac{7-i}{5}$　となる。



このとき，AP+BP の最小値は　$A'B=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　である。

また最小値を与える点Pは直線 ℓ と直線 A′B の交点である。

よって点Pを表す複素数を p とおくと，点Pが直線 ℓ 上にあることより

$p=k(3+i)$　（k は実数）…①　とおける。

また点Pが直線 A′B 上にあることより

$p=(1-t)\alpha+t(2+i)$　（t は実数）…②　とおける。

①②より　$3k+ki=\dfrac{3t+7}{5}+\dfrac{6t-1}{5}i$

k，t は実数なので $\begin{cases}3k=\dfrac{3t+7}{5}\\ k=\dfrac{6t-1}{5}\end{cases}$　これを解いて　$k=\dfrac{3}{5}$，$t=\dfrac{2}{3}$

よって最小値を与える点Pを表す複素数は　$p=\dfrac{9+3i}{5}$

令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その４〕

受験番号

評点欄

④

4

(1). $f'(x) = \dfrac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$= - \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0$ とすると、$x = 1\pm\sqrt{2}$.

よって、$f(x)$の増減は、次の表のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	極大 $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$

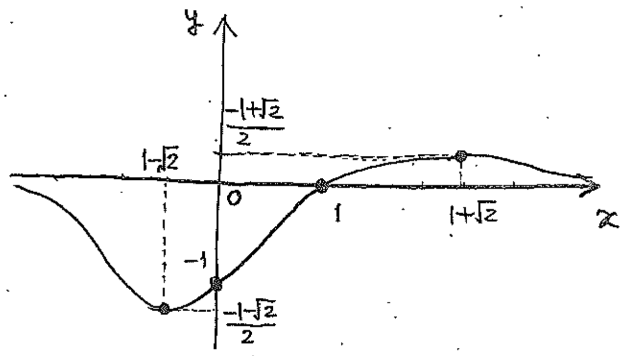
∴ 極大値：$\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$ （$x=1+\sqrt{2}$ のとき）.

極小値：$\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$ （$x=1-\sqrt{2}$ のとき）.

(2). $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = 0.$

よって、x軸が漸近線である。

求めるグラフの概形は下図。



(3). (2)のグラフより、

$0 \leqq x \leqq 1$ で、

$f(x) \leqq 0$ であるから、

求める面積をSとすると、

$S = \displaystyle\int_0^1 \left(-\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

ここで、$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ において、

$x = \tan\theta$ とおくと、

$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

xとθの対応は右のようになる

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

よって、$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$

$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4}.$

また、$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx$

$= \dfrac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{2}\log 2$

∴ $S = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\log 2$