令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数学解答紙〔その１〕

氏名

受験番号

評点欄

1

1

(1). 3つのさいころを同時に投げるときの

全事象は $6^3=216$ 通り

このとき、出た目の和が15以上となる

組みあわせは、

$(6,6,6)$, $(6,6,5)$, $(6,6,4)$, $(6,6,3)$

$(6,5,5)$, $(6,5,4)$, $(5,5,5)$ である

出た目の順を考えて、

$1+3+3+3+3+6+1=20$ 通り

ゆえに、求める確率は、$\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$ //

(2). (1)より 出た目の合計が14以下となるのは、

$1-\frac{5}{54}=\frac{49}{54}$

出た目の合計が14以下 かつ

1の目が出たさいころが少なくとも1つ

ある確率は、少なくとも1回1が出る

確率と同じなので、

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$

以上より、求める条件つき確率は、

$\frac{\frac{91}{216}}{\frac{49}{54}}=\frac{91}{196}=\frac{13}{28}$ //

(3).

出た目の積が4の倍数と

ならない場合は、次の2通りある

i) 出た目がすべて奇数のとき、

$3^3=27$ 通り

ii). 出た目の2つが奇数で、残りの1つが

2または6の目のとき、

$3^2\times2\times3=54$ 通り

これらより、出た目の積が

4の倍数にならない場合の数は

$27+54=81$ 通り

よって、出た目の積が4の倍数に

なる場合の数は、

$216-81=135$ 通り

以上より、求める確率は、

$\frac{135}{216}=\frac{5}{8}$ //

氏　　名

数学解答紙〔その２〕

受験番号

2

評点欄

2

(1)　$\alpha=\sqrt{\alpha+2}$ において，$\alpha+2\geqq 0$ かつ $\alpha\geqq 0$　よって　$\alpha\geqq 0$

このとき，両辺を２乗すると　$\alpha^2=\alpha+2$　$\therefore \alpha=2$　($\because \alpha\geqq 0$)　…答

(2)　[1]　$n=1$ のとき

$a_1=100$，$a_2=\sqrt{102}$ なので　$100>\sqrt{102}>2$　より成立する。

[2]　$n=k$ のとき　($k\geqq 1$ の自然数)

$a_k>a_{k+1}>2$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+2}-2=\sqrt{a_{k+1}+2}-2=\frac{(\sqrt{a_{k+1}+2}-2)(\sqrt{a_{k+1}+2}+2)}{\sqrt{a_{k+1}+2}+2}=\frac{a_{k+1}-2}{\sqrt{a_{k+1}+2}+2}>0$$

$$a_{k+1}-a_{k+2}=a_{k+1}-\sqrt{a_{k+1}+2}=\frac{(a_{k+1}-\sqrt{a_{k+1}+2})(a_{k+1}+\sqrt{a_{k+1}+2})}{a_{k+1}+\sqrt{a_{k+1}+2}}$$

$$=\frac{(a_{k+1}-2)(a_{k+1}+1)}{a_{k+1}+\sqrt{a_{k+1}+2}}>0$$

よって，$a_{k+1}>a_{k+2}>2$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

[1], [2] より，すべての自然数 n について，$a_n>a_{n+1}>2$ が成立する。

(3)　$a_2=\sqrt{102}$ より　$10<a_2<11$　である。

$a_3=\sqrt{a_2+2}$ であり，$12<a_2+2<13$ より　$\sqrt{12}<a_3<\sqrt{13}$　つまり　$3<a_3<4$

$a_4=\sqrt{a_3+2}$ であり，$5<a_3+2<6$ より　$\sqrt{5}<a_4<\sqrt{6}$　つまり　$2<a_4<3$

$n\geqq 5$ のとき，(2) より $a_4>a_n$ なので　$a_n<3$

よって，$a_n>3$ となる最大の自然数 n は　$n=3$　…答

氏　名

数学解答紙〔その３〕

受験番号

3

評点欄

3

(1) $OA=AC=1$，$\angle AOC=45^\circ$ なので，$\triangle OAC$ は $\angle OAC=90^\circ$ の直角二等辺三角形である。よって，$OC=\sqrt{2}$ …答

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos 45^\circ=1$

点Cから平面OABに垂線を下ろし，平面OABとの交点をHとし

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおく。(s，t は実数)

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CH}\perp$(平面OAB) なので　$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$s\cdot 1^2+t\cdot\dfrac{1}{2}-1=0$　…①

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$s\cdot\dfrac{1}{2}+t\cdot 1^2-1=0$　…②

①，② を解いて　$s=t=\dfrac{2}{3}$

$$\overrightarrow{CH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC})$$

$$|\overrightarrow{CH}|^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2(4|\overrightarrow{OA}|^2+4|\overrightarrow{OB}|^2+9|\overrightarrow{OC}|^2+8\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-12\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-12\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left\{4\cdot 1^2+4\cdot 1^2+9\cdot(\sqrt{2})^2+8\cdot\frac{1}{2}-12\cdot 1-12\cdot 1\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 6$$

$|\overrightarrow{CH}|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　よって，求める垂線の長さは　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　…答

(3) 四面体OABCの体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$　…答

四面体OABCの内接球の中心をI，半径を r とおく。

4つの四面体IOAB，IOAC，IOBC，IABCの体積の和は

四面体OABCの体積と等しく，$\triangle OAB\equiv\triangle ABC$，$\triangle OBC\equiv\triangle OCA$ に注意すると

$$\frac{1}{3}\cdot(\triangle OAB+\triangle OAC+\triangle OBC+\triangle ABC)\cdot r=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 60^\circ\times 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ\times 2\right)\cdot r=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

よって　$r=\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2}$　…答

令和６年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その４〕

受験番号

評点欄

4

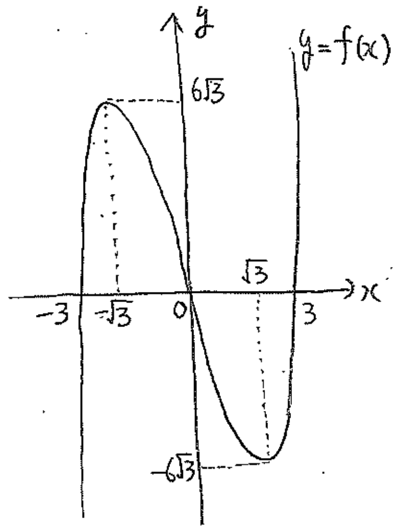
4

(1) $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x) = 0$ とすると．$x = \pm\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$

増減表より．$y=f(x)$のグラフは右図のようになる．



(2) $f(t) = f(t+3)$ とすると

$t^3 - 9t = (t+3)^3 - 9(t+3)$

$t^2 + 3t = 0$

$t(t+3) = 0 \qquad t = -3,\ 0$

(i) $t+3 \leqq -\sqrt{3}$ つまり $t \leqq -3-\sqrt{3}$ のとき

$M(t) = f(t+3) = t^3 + 9t^2 + 18t$

(ii) $t \leqq -\sqrt{3} \leqq t+3$ つまり $-3-\sqrt{3} \leqq t \leqq -\sqrt{3}$ のとき

$M(t) = f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

(iii) $-\sqrt{3} \leqq t \leqq 0$ のとき

$M(t) = f(t) = t^3 - 9t$

(iv) $0 \leqq t$ のとき

$M(t) = f(t+3) = t^3 + 9t^2 + 18t$

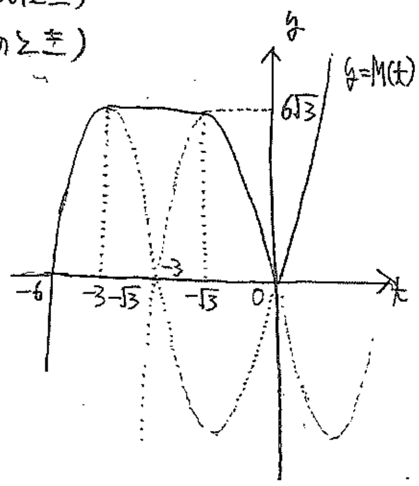
(i)〜(iv) より

$$M(t) = \begin{cases} t^3 + 9t^2 + 18t & (t \leqq -3-\sqrt{3},\ 0 \leqq t \text{ のとき}) \\ 6\sqrt{3} & (-3-\sqrt{3} \leqq t \leqq -\sqrt{3} \text{ のとき}) \\ t^3 - 9t & (-\sqrt{3} \leqq t \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$y = f(t+3)$のグラフは．$y = f(t)$のグラフを

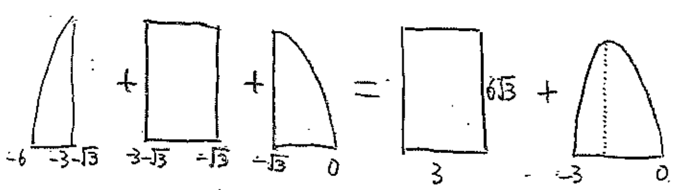
t軸方向に-3だけ平行移動したものなので．

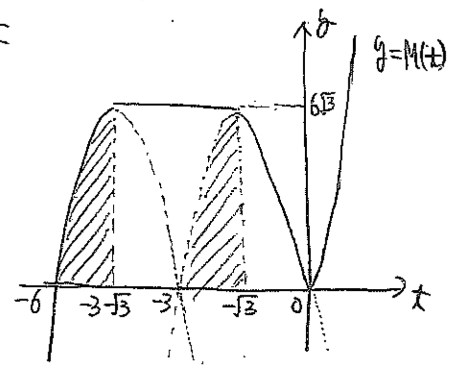
$y = M(t)$ のグラフは右図のようになる．



(3) 右図の２つの斜線部分の面積が等しいことに

注意すると．求める面積は





$= 3 \cdot 6\sqrt{3} + \displaystyle\int_{-3}^{0} (t^3 - 9t)\,dt$

$= 18\sqrt{3} + \left[\dfrac{1}{4}t^4 - \dfrac{9}{2}t^2\right]_{-3}^{0} = \underline{18\sqrt{3} + \dfrac{81}{4}}$