氏　名

数学解答紙〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) このさいころで1の目が出る確率を p とおくと、題意より

$$p+2p+3p+4p+5p+6p=1$$

$$p=\frac{1}{21}$$

よって、このさいころで k の目が出る確率は下の表のようになる。

k	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

したがって、このさいころで3の目が出る確率は $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ …(答)

(2) このさいころを n 回投げるとき「3の目が2回以上出る」という事象は、
「3の目が1回も出ない、または3の目が1回出る」という事象の余事象である。
よって、求める確率は、

$$1-\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right\}=1-\frac{(n+6)\cdot 6^{n-1}}{7^n}\ \cdots(\text{答})$$

(3) このさいころを1回投げるとき

奇数の目が出る確率は $\frac{1}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{3}{7}$

偶数の目が出る確率は $\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{4}{7}$

このさいころを2回投げるとき、出る目の和が偶数となる事象を A、
3の目が1回以上出る事象を B とする。
出る目の和が偶数となるのは、1回目、2回目に出る目の偶奇が
一致するときなので、

$$P(A)=\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$$

このとき、3の目が1回以上出るのは、(1, 3)、(3, 1)、(3, 3)、(3, 5)、(5, 3)
の場合であるから、

$$P(A\cap B)=\frac{1}{21}\cdot\frac{3}{21}+\frac{3}{21}\cdot\frac{1}{21}+\left(\frac{3}{21}\right)^2+\frac{3}{21}\cdot\frac{5}{21}+\frac{5}{21}\cdot\frac{3}{21}=\frac{5}{49}$$

よって、求める条件付き確率は、

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{49}}{\frac{25}{49}}=\frac{1}{5}\ \cdots(\text{答})$$

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その２〕

受験番号

評点欄

2

2

(1) 球面Sの方程式は

中心 C(0, 0, 1)、半径1なので

$x^2+y^2+(z-1)^2=1$ —①

(2) P(x, y, z) とする

$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{BP}=(x,\ y-2,\ z)$

$\overrightarrow{CP}=(x,\ y,\ z-1)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{CP}=2$

$(x-1)\times x+y\times(y-2)+z^2$

$-\{ax+by+c(z-1)\}=2$

$x^2+y^2+z^2-(a+1)x-(b+2)y-cz$

$+c-2=0$

①より $x^2+y^2+z^2=2z$ なので

$-(a+1)x-(b+2)y-(c-2)z+c-2=0$

点Pは球面S上の点でとり方によらないので

x, y, zの恒等式とみなせる

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b+2=0 \\ c-2=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

したがって Q(−1, −2, 2)

(3) $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{CP}$ のなす角を θ とする

（ただし、$0\leqq\theta<2\pi$）

(2)より

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{CP}$

$=2+|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{CP}|\cos\theta$

$=2+\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}\times1\times\cos\theta$

$=2+3\cos\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ なので

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ が最大となるのは $\cos\theta=1$ のときである

よって $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2+3\times1=5$

$AP^2+BP^2=|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2$

$=|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=(1-0)^2+(0-2)^2+(0-0)^2$

$+2(2+3\cos\theta)$

$=9+6\cos\theta$

AP^2+BP^2 が最大となるのは $\cos\theta=1$ の時である

よって $AP^2+BP^2=9+6\times1=15$

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その３〕

受験番号

評点欄

3

3

(1). $y' = \dfrac{(n+1)\cdot(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)^{n+1}\cdot 1}{x^2}$

$= \dfrac{(\log x)^n\cdot\{(n+1)-\log x\}}{x^2}$

$x>1$ において，$y'=0$ となるのは，

$(n+1)-\log x=0$ つまり，$x=e^{n+1}$ のとき，

増減表は，下のようになる。

x	1	$\cdots$	e^{n+1}	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$
y	／	↗	極大	↘

$x=e^{n+1}$ で，$y=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}=\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

よって，極大値：$\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$ （$x=e^{n+1}$ のとき）

極小値：なし。

(2). (1)より，関数 $\dfrac{(\log x)^{n+1}}{x}$ $(x>1)$ は，

$x=e^{n+1}$ で 極大かつ最大 となるので，

$x>1$ において，$0<\dfrac{(\log x)^{n+1}}{x}\leqq\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

両辺を $\log x$ (>0) で割って，

$$0<\frac{(\log x)^n}{x}\leqq\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{\log x}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{\log x}=0$ なので，

はさみうちの原理を用いて，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^n}{x}=0$$

(3). $\displaystyle\int_1^x\frac{(\log t)^n}{t^2}dt$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{t}\cdot(\log t)^n\right]_1^x+\int_1^x n\cdot\frac{(\log t)^{n-1}}{t^2}dt$

$\displaystyle=-\frac{(\log x)^n}{x}+n\int_1^x\frac{(\log t)^{n-1}}{t^2}dt$

なので，$n\geqq1$ のとき，

$\displaystyle I_n=\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{(\log t)^n}{t^2}dt$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{(\log x)^n}{x}+n\int_1^x\frac{(\log t)^{n-1}}{t^2}dt\right\}$

$=0+n\cdot I_{n-1}$ （∵ (2)より）

$=n\cdot I_{n-1}$

$\therefore\ I_n=n\cdot I_{n-1}$ $(n\geqq1)$

両辺を $n!$ で割って，

$\dfrac{I_n}{n!}=\dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}$ なので，

$\dfrac{I_n}{n!}=\dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}=\cdots=\dfrac{I_1}{1!}=\dfrac{I_0}{0!}$

ここで，$\displaystyle I_0=\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{(\log t)^0}{t^2}dt$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{1}{t^2}dt$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}+1\right)=1$ なので，

$\dfrac{I_n}{n!}=1$

$\therefore\ I_n=n!$ $(n\geqq0)$

令和７年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数学解答紙〔その４〕

氏名

受験番号

評点欄

4

4

(1). $z\bar{z}-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}=0$ より

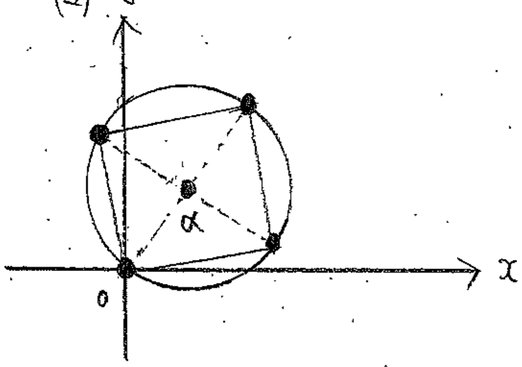
$(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=|\alpha|^2$

$|z-\alpha|=|\alpha|$

$|z-(3+4i)|=|3+4i|=5$ より．

C は点 $3+4i$ を中心とし，半径 5 の円

(2)



原点と C 上の 3 点が正方形の 4 つの頂点をなすとき，1 点は，$2\alpha=6+8i$

残り 2 点は，点 α を原点まわりに $\pm\frac{\pi}{4}$ 回転させ，$|\alpha|$ を $\sqrt{2}$ 倍したした点なので，

$\sqrt{2}\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right)(3+4i)$ （複号同順）

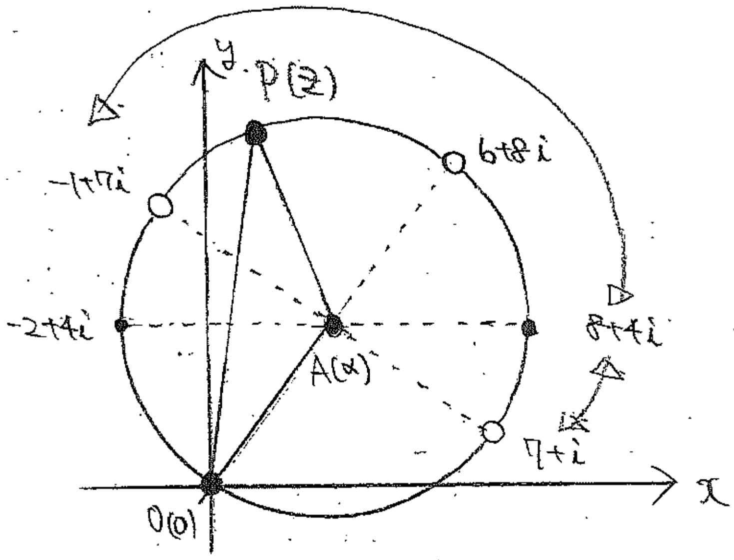
$=(1\pm i)(3+4i)$

$=-1+7i,\ 7+i$

以上，求める複素数の 3 点は，

$6+8i,\ -1+7i,\ 7+i$

(3). $O(0)$，$A(\alpha)$，$P(z)$ とおくと，$OA=AP$ より 3 点 O，A，P が三角形となるとき，$\triangle OAP$ はつねに $\angle A$ を頂角とする 2 等辺三角形となる．よって，$\triangle OAP$ が鈍角三角形となるのは，$\angle OAP$ が鈍角となるときのみである．



(2) で求めた点を基準に考えることにより，求める a がとる値の範囲は，

$b\geqq4$ のとき，$-1<a\leqq8$ かつ $a\neq6$

$b\leqq4$ のとき，$7<a\leqq8$．