氏　　名

数学解答紙〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) このさいころで1の目が出る確率をpとおくと、題意より

$$p+2p+3p+4p+5p+6p=1$$

$$p=\frac{1}{21}$$

よって、このさいころでkの目が出る確率は下の表のようになる。

k	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

したがって、このさいころで3の目が出る確率は $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ …(答)

(2) このさいころをn回投げるとき、「3の目が2回以上出る」という事象は、「3の目が1回も出ない、または3の目が1回出る」という事象の余事象である。

よって、求める確率は、

$$1-\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right\}=1-\frac{(n+6)\cdot 6^{n-1}}{7^n} \quad \cdots(答)$$

(3) このさいころを1回投げるとき、

奇数の目が出る確率は $\frac{1}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{3}{7}$

偶数の目が出る確率は $\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{4}{7}$

このさいころを2回投げるとき、出る目の和が偶数となる事象をA、3の目が1回以上出る事象をBとする。

出る目の和が偶数となるのは、1回目、2回目に出る目の偶奇が一致するときなので、

$$P(A)=\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$$

このとき、3の目が1回以上出るのは、(1, 3)、(3, 1)、(3, 3)、(3, 5)、(5, 3)の場合であるから、

$$P(A\cap B)=\frac{1}{21}\cdot\frac{3}{21}+\frac{3}{21}\cdot\frac{1}{21}+\left(\frac{3}{21}\right)^2+\frac{3}{21}\cdot\frac{5}{21}+\frac{5}{21}\cdot\frac{3}{21}=\frac{5}{49}$$

よって、求める条件付き確率は、

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{49}}{\frac{25}{49}}=\frac{1}{5} \quad \cdots(答)$$

氏　名

数学解答紙〔その2〕

受験番号

2

評点欄

2

(1) 球面Sの方程式は

中心 C(0, 0, 1)、半径1なので

$x^2+y^2+(z-1)^2=1$ —①

(2) $P(x, y, z)$ とする

$\overrightarrow{AP}=(x-1, y, z)$

$\overrightarrow{BP}=(x, y-2, z)$

$\overrightarrow{CP}=(x, y, z-1)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{CP}=2$

$(x-1)\times x+y\times(y-2)+z^2$

$-\{ax+by+c(z-1)\}=2$

$x^2+y^2+z^2-(a+1)x-(b+2)y-cz$

$+c-2=0$

①より $x^2+y^2+z^2=2z$ なので

$-(a+1)x-(b+2)y-(c-2)z+c-2=0$

点Pは球面S上の点で、とり方によらないので

x, y, zの恒等式とみなせる

$\begin{cases} a+1=0 \\ b+2=0 \\ c-2=0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

したがって $Q(-1, -2, 2)$

(3) $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{CP}$ のなす角を θ とする

（ただし、$0\leqq\theta<2\pi$）

(2)より

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{CP}$

$=2+|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{CP}|\cos\theta$

$=2+\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}\times1\times\cos\theta$

$=2+3\cos\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ なので

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ が最大となるのは $\cos\theta=1$ のときである

よって $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2+3\times1=5$

$AP^2+BP^2=|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2$

$=|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=(1-0)^2+(0-2)^2+(0-0)^2$

$+2(2+3\cos\theta)$

$=9+6\cos\theta$

AP^2+BP^2 が最大となるのは $\cos\theta=1$ の時である

よって $AP^2+BP^2=9+6\times1=15$

氏　　名

数学解答紙〔その3〕

受験番号

3

評点欄

3

(1) $t=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ の両辺を２乗すると

$$t^2=3\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$=-\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta+2 \quad \cdots 答$$

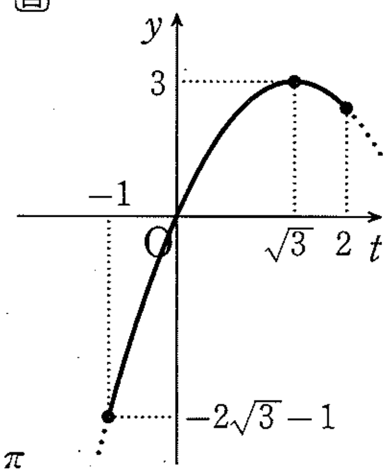
よって　$\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta=2-t^2$

したがって　$y=(2-t^2)+2\sqrt{3}t-2=-t^2+2\sqrt{3}t$　…答

(2) $t=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$　…①

$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$　…②

したがって　$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$　なので　$-1\leqq t\leqq 2$　…答



(3) (1)から　$y=-t^2+2\sqrt{3}t=-(t-\sqrt{3})^2+3$

$-1\leqq t\leqq 2$ の範囲において，y は

$t=\sqrt{3}$ のとき，最大値３をとり，

$t=-1$ のとき，最小値 $-2\sqrt{3}-1$ をとる。

$t=\sqrt{3}$ のとき，①から　$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

②の範囲で解くと，$\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{6}\pi$

$t=-1$ のとき，①から　$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-1$

②の範囲で解くと，$\theta-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$　すなわち　$\theta=0$

よって　$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{6}\pi$ のとき，最大値３　$\theta=0$ のとき，最小値 $-2\sqrt{3}-1$　…答

氏　名

数学解答紙〔その４〕

受験番号

評点欄

4

4

(1)　$f(\alpha)=0$　より　$4\alpha^3-3\alpha^2+k=0$　…①

$f'(x)=12x^2-6x$　であり　$f'(\alpha)=0$　より　$12\alpha^2-6\alpha=0$　…②

$\alpha>0$ と①，②より　$\alpha=\frac{1}{2}$，$k=\frac{1}{4}$　…答

(2)　(1)の結果より

$$f(x)=4x^3-3x^2+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(4x^2-x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(4x+1)$$

よって，方程式 $f(x)=0$ の解は　$x=-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$　…答

(3)　$f'(x)=0$　とすると　$6x(2x-1)=0$　より　$x=0$，$\frac{1}{2}$

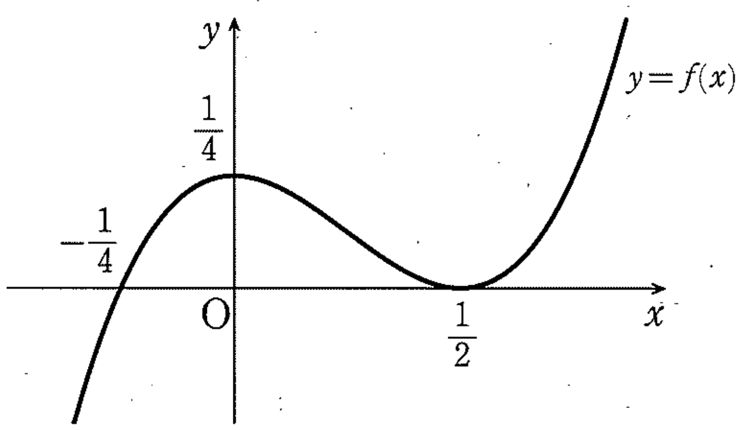
$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって　$x\leqq 0$，$\frac{1}{2}\leqq x$ で単調に増加，

$0\leqq x\leqq \frac{1}{2}$ で単調に減少する。

グラフは下図のようになる。



(4)　求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\left[x^4-x^3+\frac{1}{4}x\right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(-\frac{1}{4}\right)^4\right\}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{4}\right)^3\right\}+\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{27}{256}$$　…答