氏　名

数学解答紙〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) このさいころで1の目が出る確率を p とおくと、題意より

$$p+2p+3p+4p+5p+6p=1$$

$$p=\frac{1}{21}$$

よって、このさいころで k の目が出る確率は下の表のようになる。

k	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

したがって、このさいころで3の目が出る確率は $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ …(答)

(2) このさいころを n 回投げるとき「3の目が2回以上出る」という事象は、「3の目が1回も出ない、または3の目が1回出る」という事象の余事象である。

よって、求める確率は、

$$1-\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right\}=1-\frac{(n+6)\cdot 6^{n-1}}{7^n} \quad \cdots(答)$$

(3) このさいころを1回投げるとき

奇数の目が出る確率は $\frac{1}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{3}{7}$

偶数の目が出る確率は $\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{4}{7}$

このさいころを2回投げるとき、出る目の和が偶数となる事象をA、3の目が1回以上出る事象をBとする。

出る目の和が偶数となるのは、1回目、2回目に出る目の偶奇が一致するときなので、

$$P(A)=\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$$

このとき、3の目が1回以上出るのは、(1, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 3) の場合であるから、

$$P(A\cap B)=\frac{1}{21}\cdot\frac{3}{21}+\frac{3}{21}\cdot\frac{1}{21}+\left(\frac{3}{21}\right)^2+\frac{3}{21}\cdot\frac{5}{21}+\frac{5}{21}\cdot\frac{3}{21}=\frac{5}{49}$$

よって、求める条件付き確率は、

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{49}}{\frac{25}{49}}=\frac{1}{5} \quad \cdots(答)$$

令和７年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その２〕

受験番号

評点欄

②

2

(1) 球面 S の方程式は

中心 $C(0,0,1)$，半径 1 なので

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1 \quad \text{—①}$$

(2) $P(x,y,z)$ とする

$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{BP}=(x,\ y-2,\ z)$

$\overrightarrow{CP}=(x,\ y,\ z-1)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{CP}=2$

$(x-1)\times x+y\times(y-2)+z^2$

$\qquad -\{ax+by+c(z-1)\}=2$

$x^2+y^2+z^2-(a+1)x-(b+2)y-cz$

$\qquad +c-2=0$

①より $x^2+y^2+z^2=2z$ なので

$-(a+1)x-(b+2)y-(c-2)z+c-2=0$

点 P は球面 S 上の点でとり方によらないので

x,y,z の恒等式とみなせる

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b+2=0 \\ c-2=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

したがって $Q(-1,-2,2)$

(3) $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{CP}$ のなす角を θ とする

（ただし，$0\leqq\theta<2\pi$）

(2)より

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{CP}$

$=2+|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{CP}|\cos\theta$

$=2+\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}\times1\times\cos\theta$

$=2+3\cos\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ なので

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ が最大となるのは $\cos\theta=1$ のときである

よって $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2+3\times1=5$

$AP^2+BP^2=|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2$

$=|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=(1-0)^2+(0-2)^2+(0-0)^2$

$\qquad +2(2+3\cos\theta)$

$=9+6\cos\theta$

AP^2+BP^2 が最大となるのは $\cos\theta=1$ の時である

よって $AP^2+BP^2=9+6\times1=15$

令和７年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数 学 解 答 紙 〔その３〕

受験番号

評点欄

3

3

(1). $y' = \dfrac{(n+1)(\log x)^n \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x)^{n+1} \cdot 1}{x^2}$

$= \dfrac{(\log x)^n \cdot \{(n+1) - \log x\}}{x^2}$

$x>1$ において、$y'=0$ となるのは、

$(n+1) - \log x = 0$ つまり、$x = e^{n+1}$ のとき。

増減表は、下のようになる。

x	1	…	e^{n+1}	…
y'	／	+	0	−
y	／	↗	極大	↘

$x = e^{n+1}$ で、$y = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} = \left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

よって、極大値：$\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$　($x = e^{n+1}$ のとき)。

極小値：なし。

(2). (1)より、関数 $\dfrac{(\log x)^{n+1}}{x}$ $(x>1)$ は、

$x = e^{n+1}$ で極大かつ最大となるので、

$x>1$ において、$0 < \dfrac{(\log x)^{n+1}}{x} \leqq \left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

両辺を $\log x$ (>0) で割って、

$0 < \dfrac{(\log x)^n}{x} \leqq \left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{\log x}$

ここで、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\log x} = 0$ なので、

はさみうちの原理を用いて、

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0$

(3). $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$

$= -\dfrac{1}{x} + 1$ なので、

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}+1\right) = 1$

よって、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = 1$　… Ⓐ

$n \geqq 1$ のとき、

$\displaystyle\int_1^x \frac{(\log t)^n}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\cdot(\log t)^n\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t}\cdot n(\log t)^{n-1}\cdot\frac{1}{t}\,dt$

$\displaystyle = -\frac{(\log x)^n}{x} + n\int_1^x \frac{(\log t)^{n-1}}{t^2}\,dt$

よって、

$\displaystyle I_n = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{(\log t)^n}{t^2}\,dt$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{(\log x)^n}{x} + n\int_1^x \frac{(\log t)^{n-1}}{t^2}\,dt\right\}$

$= 0 + n \cdot I_{n-1}$　($\because$ (2)より)

$= n \cdot I_{n-1}$

$\therefore I_n = n \cdot I_{n-1}$　$(n \geqq 1)$

両辺を $n!$ で割って、

$\dfrac{I_n}{n!} = \dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}$ なので、

$\dfrac{I_n}{n!} = \dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!} = \cdots = \dfrac{I_1}{1!} = \dfrac{I_0}{0!}$

ここで、$\displaystyle I_0 = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{(\log t)^0}{t^2}\,dt$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = 1$　($\because$ Ⓐより)

よって、$\dfrac{I_n}{n!} = 1$ より、$I_n = n!$

令和７年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏名

数学解答紙〔その４〕

受験番号

評点欄 4

4

(1). $z\bar{z}-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}=0$ より

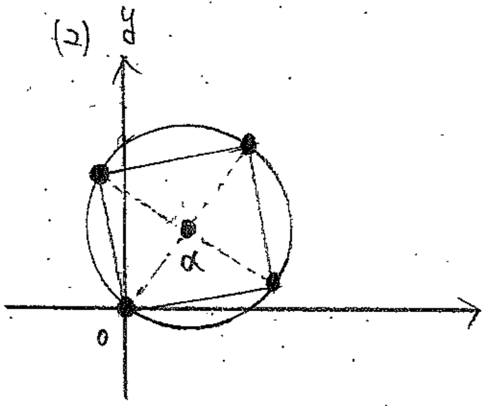
$(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=|\alpha|^2$

$|z-\alpha|=|\alpha|$

$|z-(3+4i)|=|3+4i|=5$ より.

Cは点$3+4i$を中心とし、半径5の円 //

(2)



原点とC上の3点が正方形の4つの頂点をなすとき、1点は、$2\alpha=6+8i$

残り2点は、点αを原点まわりに $\pm\frac{\pi}{4}$ 回転させ、$|\alpha|$を$\sqrt{2}$倍したした点なので、

$\sqrt{2}\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right)(3+4i)$ （複号同順）

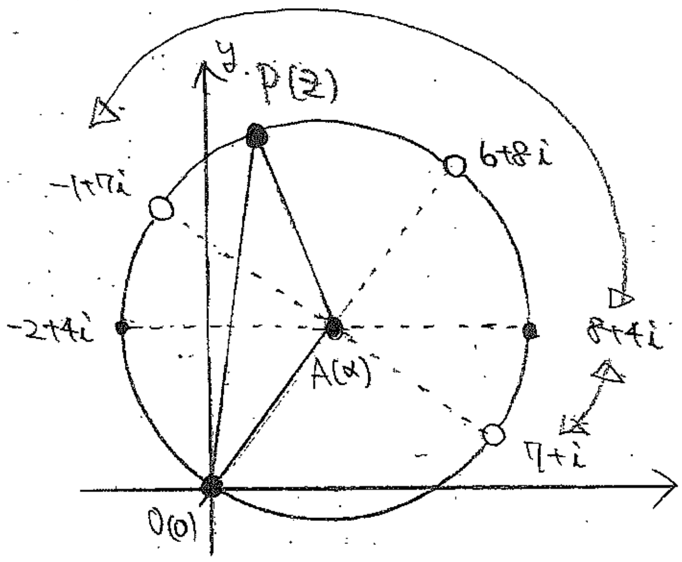
$=(1\pm i)(3+4i)$

$=-1+7i,\ 7+i.$

以上、求める複素数の3点は、

$6+8i,\ -1+7i,\ 7+i.$ //

(3). O(0), A(α), P(z) とおくと、OA=AP より 3点 O, A, P が三角形となるとき、△OAPはつねに∠Aを頂角とする2等辺三角形となる。よって、△OAPが鈍角三角形となるのは、∠OAPが鈍角となるときのみである。



(2)で求めた点を基準に考えることにより、求めるaがとる値の範囲は、

$b\geqq 4$ のとき、$-1<a\leqq 8$ かつ $a\neq 6$

$b\leqq 4$ のとき、$7<a\leqq 8$. //