令和７年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) 4人の手の出し方の総数は 3^4 通りで、
1人だけが勝つとき、勝者の決まり方が ${}_4C_1$ 通りで
そのおのおのに対して、手の出し方が3通りずつあるので
求める確率は

$$\frac{{}_4C_1\times 3}{3^4}=\frac{4}{27}\quad\cdots(答)$$

(2) (1)と同様にして4人でじゃんけんを行ったとき

2人が勝つ確率は $\dfrac{{}_4C_2\times 3}{3^4}=\dfrac{2}{9}$

3人が勝つ確率は $\dfrac{{}_4C_3\times 3}{3^4}=\dfrac{4}{27}$

4人全員で2回目のじゃんけんを行うのは
1回目があいこになるときなので、求める確率は

$$1-\left(\frac{4}{27}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}\right)=\frac{13}{27}\quad\cdots(答)$$

(3) 3人でじゃんけんを行うとき、1人だけが勝つ確率は

$$\frac{{}_3C_1\times 3}{3^3}=\frac{1}{3}$$

2人でじゃんけんを行うとき、1人だけが勝つ確率は

$$\frac{{}_2C_1\cdot 3}{3^2}=\frac{2}{3}$$

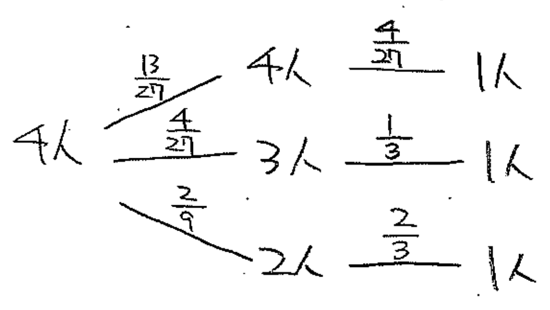
ここで、2回目のじゃんけんで1人だけが勝つ事象をA、
1回目のじゃんけんで2人だけが勝つ事象をBとおくと

$$P(A)=\frac{13}{27}\cdot\frac{4}{27}+\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{196}{27^2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{27}\cdot\frac{2}{3}=\frac{108}{27^2}$$

よって、求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{108}{27^2}}{\frac{196}{27^2}}=\frac{27}{49}\quad\cdots(答)$$



氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その２〕

受験番号

2

評点欄

2

(1) 題意より

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+3 \\ b_{n+1}=b_n+(a_n+b_n)=a_n+2b_n \end{cases} \cdots \text{答}$$

また，$n=1$ を代入すると

$b_2=a_1+2b_1$　より　$7=a_1+2\times3$　これを解くと　$a_1=1$　…答

(2) (1) より，$a_{n+1}=2a_n+3$　を変形すると　$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

よって，数列 $\{a_n+3\}$ は，初項 $a_1+3=1+3=4$，公比２の等比数列なので

$a_n+3=4\cdot2^{n-1}$　したがって　$a_n=2^{n+1}-3$　…答

(3) (1)，(2) より　$b_{n+1}=2b_n+2^{n+1}-3$

$b_n=(n-1)\cdot2^n+3$ …① となることを数学的帰納法を用いて証明する。

(証明)

[1]　$n=1$ のとき

①より，$b_1=3$ となり $n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$　(k は１以上の自然数) のとき

① が成り立つと仮定すると　$b_k=(k-1)\cdot2^k+3$

このとき　$b_{k+1}=2b_k+2^{k+1}-3=2\{(k-1)\cdot2^k+3\}+2^{k+1}-3$

$=k\cdot2^{k+1}+3=\{(k+1)-1\}\cdot2^{k+1}+3$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

令和７年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数 学 解 答 紙 〔その３〕

受験番号

評点欄

3

3

(1). $f(x)=\tan\frac{x}{4}$ $(0\leqq x<2\pi)$ とすると,

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot\cos^2\frac{x}{4}}$$

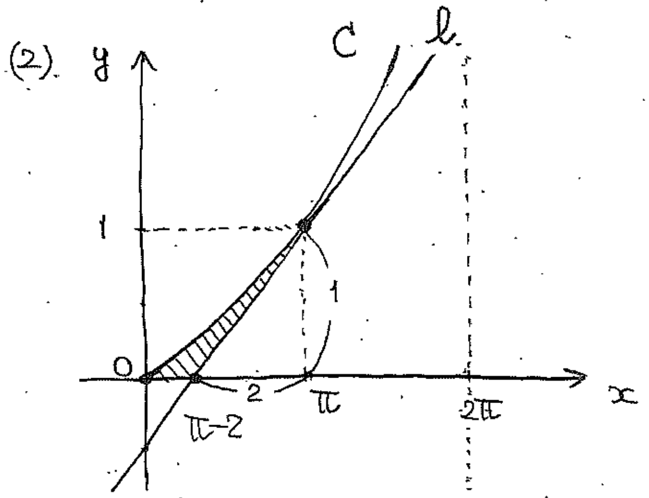
よって. $f'(\pi)=\frac{1}{2}$.

直線 l の方程式は.

$$y-1=\frac{1}{2}(x-\pi).$$

すなわち. $y=\frac{1}{2}x+1-\frac{\pi}{2}$ //

(2).



直線 l と x 軸との交点の x 座標は.

$\frac{1}{2}x+1-\frac{\pi}{2}=0$ を解いて. $x=\pi-2$.

求める面積は. 上図の斜線部分で

あるから. 求める面積を S とすると.

$$S=\int_0^{\pi}\tan\frac{x}{4}\,dx-\frac{1}{2}\cdot2\cdot1$$

$$=\left[-4\log\left|\cos\frac{x}{4}\right|\right]_0^{\pi}-1.$$

$$=-4\cdot\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log1\right)-1.$$

$$=2\log2-1$$ //

(3). 求める体積を V とすると.

$$V=\int_0^{\pi}\pi\left(\tan\frac{x}{4}\right)^2dx-\frac{1}{3}\cdot(\pi\cdot1^2)\cdot2$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}-1\right)dx-\frac{2}{3}\pi.$$

$$=\pi\left[4\tan\frac{x}{4}-x\right]_0^{\pi}-\frac{2}{3}\pi.$$

$$=\pi(4-\pi)-\frac{2}{3}\pi$$

$$=\frac{10}{3}\pi-\pi^2$$ //

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その４〕

受験番号

評点欄

4

4

(1). $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ //

$\beta = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$ //

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}$

$= \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi$ //

(2). $\alpha^n = \beta^n$ のとき $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 1$

$\therefore \cos\frac{5n}{12}\pi + i\sin\frac{5n}{12}\pi = \cos 0 + i\sin 0$

この式をみたすとき、整数 k を用いて、

$\frac{5n}{12}\pi = 2k\pi$

$k = \frac{5n}{24}$ とおける

これをみたす自然数 n の最小のものを N とするので、

$N = 24$ //

(3). $|\alpha^n - \beta^n| = \left|\alpha^n\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)\right|$

$= \left|1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|$

$A(1)$、$P\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)$、$\angle POA = \theta$ とおくと、

$|\alpha^n - \beta^n|^2 = \left|1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|^2 = AP^2$ より、

$\triangle OAP$ で余弦定理を用いて、$AP^2 = 2 - 2\cos\theta$

AP^2 が最小となるとき、$\cos\theta$ が最大となる

(2)より $1 \leqq n \leqq 23$ の自然数であり、

$\cos\frac{5n}{12}\pi$ の値は、$\cos\frac{l}{12}\pi$ $(1 \leqq l \leqq 23)$ の値に含まれる。ここで、

$\frac{5n}{12}\pi = \frac{\pi}{12} + 2m\pi$、$\frac{23}{12}\pi + 2m\pi$

$(m = 0, 1, 2, 3, 4)$

$5n = 1 + 24m$、$23 + 24m$

これをみたす整数 (n, m) の組は、

$(n, m) = (5, 1), (19, 3)$ より

$1 \leqq n \leqq 23$ において、$\cos\frac{5n}{12}\pi$ は、

最大値 $\cos\frac{\pi}{12}$ をみたす整数 n が存在する

このとき $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ なので、

$|\alpha^n - \beta^n|^2$ の最小値は、

$2 - 2\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})$ //

これをみたす n は、$n = 5, 19$ //