令和８年度入学試験（教育学部）

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その１〕

受験番号

1

評点欄

1

(1) $\vec{a}=(2,1,0)$, $\vec{b}=(\sqrt{5},0,\sqrt{11})$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+0^2+(\sqrt{11})^2}=4$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times\sqrt{5}+1\times0+0\times\sqrt{11}=2\sqrt{5}$

また

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$2\sqrt{5}=\sqrt{5}\times4\times\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ より $\underline{\theta=\frac{\pi}{3}}$ //

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times4\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\sqrt{15}$ $\therefore \underline{\sqrt{15}}$ //

(2) $\vec{CH}=\vec{OH}-\vec{OC}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{OC}$

$=(2s+\sqrt{5}t,\ s,\ \sqrt{11}t-12\sqrt{5})$

$CH\perp$ 平面OABより

$\begin{cases}\vec{CH}\cdot\vec{a}=0 & -① \\ \vec{CH}\cdot\vec{b}=0 & -②\end{cases}$

①より

$(2s+\sqrt{5}t)\times2+s\times1=0$

$5s+2\sqrt{5}t=0$ $-①'$

②より

$(2s+\sqrt{5}t)\times\sqrt{5}+(\sqrt{11}t-12\sqrt{5})\times\sqrt{11}=0$

$\sqrt{5}s+8t-6\sqrt{55}=0$ $-②'$

①'②'を解くと.

$\underline{s=-2\sqrt{11},\ t=\sqrt{55}}$ //

$\vec{OH}=-2\sqrt{11}\vec{a}+\sqrt{55}\vec{b}$

$=(\sqrt{11},-2\sqrt{11},11\sqrt{5})$ $\therefore \underline{H(\sqrt{11},-2\sqrt{11},11\sqrt{5})}$ //

(3) $\vec{CH}=\vec{OH}-\vec{OC}$

$=(\sqrt{11},-2\sqrt{11},-\sqrt{5})$

$|\vec{CH}|=\sqrt{(\sqrt{11})^2+(-2\sqrt{11})^2+(-\sqrt{5})^2}$

$=2\sqrt{15}$ $\underline{\therefore CH=2\sqrt{15}}$ //

求める体積をVとして

$V=\frac{1}{3}\times\triangle OAB\times CH$

$=\frac{1}{3}\times\sqrt{15}\times2\sqrt{15}$

$=10$

したがって $\underline{\text{四面体OABCの体積は}10}$ //

氏　名

数学解答紙〔その２〕

受験番号

2

評点欄

2

1回の試行において，赤玉を取り出す確率は $\frac{1}{5}$，白玉を取り出す確率は $\frac{4}{5}$ である。

(1)　2回の試行を繰り返したときの得点が0でない事象を A とする。求める確率 $P(A)$ は

$$P(A)=1-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}\quad \cdots 答$$

また，3回の試行を繰り返したときの得点が 0でない事象を B とする。

事象 A と事象 B が同時に起こるのは次の2通りである。

[1]　2回目までに白玉が取り出された回数が2となる

[2]　2回目までに赤玉が取り出された回数が1であり，3回目に白玉が取り出される

この確率 $P(A\cap B)$ は　$P(A\cap B)=\left(\frac{4}{5}\right)^2+{}_2C_1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{112}{125}$

よって，求める条件付き確率は $P_A(B)$ であるから

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{112}{125}\times\frac{25}{24}=\frac{14}{15}\quad\cdots 答$$

(2)　$n=1$ のとき　$E_1=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$

$n\geqq 2$ のとき，とり得る得点を X，確率を p_X とすると，確率分布図は次のようになる。

X	0	$n-1$	n	計
p_X	p_0	p_{n-1}	p_n	1

$$p_{n-1}={}_nC_1\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}=\frac{4^{n-1}\cdot n}{5^n},\quad p_n=\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

求める期待値 E_n は　$E_n=0\times p_0+(n-1)\cdot p_{n-1}+n\cdot p_n=\frac{4^{n-1}\cdot n(n+3)}{5^n}$

これは $n=1$ のときも成り立つ。よって，$E_n=\frac{4^{n-1}\cdot n(n+3)}{5^n}$　$\cdots$ 答

(3)　$E_n>E_{n+1}$ を満たすとき　$\frac{E_n}{E_{n+1}}>1$　$(\because E_{n+1}>0)$

ここで　$\frac{E_n}{E_{n+1}}=\frac{\frac{4^{n-1}\cdot n(n+3)}{5^n}}{\frac{4^n\cdot(n+1)(n+4)}{5^{n+1}}}=\frac{5n(n+3)}{4(n+1)(n+4)}$　なので　$\frac{5n(n+3)}{4(n+1)(n+4)}>1$

よって　$n^2-5n-16>0$　より　$n<\frac{5-\sqrt{89}}{2}$，$\frac{5+\sqrt{89}}{2}<n$

$9<\sqrt{89}<10$ であり，n は自然数なので　$n\geqq 8$　よって，求める必要十分条件は　$n\geqq 8$　$\cdots$ 答

同様に，$E_n<E_{n+1}$ を満たす n は　$1\leqq n\leqq 7$

したがって　$E_1<E_2<\cdots<E_7<E_8>E_9>\cdots$　となり，E_n が最大となる n は　$n=8$　$\cdots$ 答

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その３〕

受験番号

評点欄

３

3

(1) $f(2) = 2^3 - 9\cdot 2^2 + 26\cdot 2 - 24 = \underline{0}$ //

$f(2)=0$ なので、因数定理より $f(x)$ は $x-2$ を因数にもつ

ゆえに $f(x) = (x-2)(x^2-7x+12) = (x-2)(x-3)(x-4)$

よって方程式 $f(x)=0$ の解は $x=\underline{2,\ 3,\ 4}$ //

(2) $f(3)=0$ なので接点の座標は $(3,0)$ である.

$f'(x) = 3x^2-18x+26$ より $f'(3)=-1$

よって直線 l の方程式は

$$y - 0 = -(x-3)$$

$$\underline{y = -x+3}$$ //

ここで

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)(x-3) & (x \leqq 1,\ 3 \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x-1)(x-3) & (1 < x < 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$x \leqq 1,\ 3 \leqq x$ のとき

$(x-1)(x-3) = -x+3$ より

$x(x-3)=0$

$x \leqq 1,\ 3 \leqq x$ より $x=0, 3$

$x=0$ のとき　$y=3$

$x=3$ のとき　$y=0$

$1 < x < 3$ のとき

$-(x-1)(x-3) = -x+3$ より

$(x-2)(x-3)=0$

$1<x<3$ より　$x=2$

$x=2$ のとき　$y=1$

よって求める共有点の座標は　$\underline{(0,3),\ (2,1),\ (3,0)}$ //

(3) 右図より、求める面積は

$$\int_0^1 \{(-x+3)-(x-1)(x-3)\}dx + \int_1^2 \{(-x+3)+(x-1)(x-3)\}dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2+3x)\,dx + \int_1^2 (x^2-5x+6)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^2$$

$$= \underline{2}$$ //