

氏名

--

数学解答紙 [その1]

受験番号

--	--	--	--	--

1

評点欄

1

(1) $\vec{a} = (2, 1, 0), \vec{b} = (\sqrt{5}, 0, \sqrt{11})$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 0^2 + (\sqrt{11})^2} = 4$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times \sqrt{5} + 1 \times 0 + 0 \times \sqrt{11} = 2\sqrt{5}$

また \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とすると

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

$2\sqrt{5} = \sqrt{5} \times 4 \times \cos \theta$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$

$0 < \theta < \pi \neq 1 \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$\Delta OAB = \frac{1}{2} \times |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \sin \theta$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3}$

$= \sqrt{15} \quad \therefore \underline{\underline{\sqrt{15}}}$

(3) $\vec{cH} = \vec{cH} - \vec{cO}$

$= (\sqrt{11}, -2\sqrt{11}, -\sqrt{5})$

$|\vec{cH}| = \sqrt{(\sqrt{11})^2 + (-2\sqrt{11})^2 + (-\sqrt{5})^2}$

$= 2\sqrt{15}$

$\therefore \underline{\underline{cH = 2\sqrt{15}}}$

求める体積を V とし

$V = \frac{1}{3} \times \Delta OAB \times cH$

$= \frac{1}{3} \times \sqrt{15} \times 2\sqrt{15}$

$= 10$

したがって、四面体 $OABC$ の体積は 10

(2) $\vec{cH} = \vec{cH} - \vec{cO}$

$= s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{cO}$

$= (2s + \sqrt{5}t, s, \sqrt{11}t - 2\sqrt{5})$

$cH \perp$ 平面 OAB かつ

$\begin{cases} \vec{cH} \cdot \vec{a} = 0 & \text{--- ①} \\ \vec{cH} \cdot \vec{b} = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$

① かつ

$(2s + \sqrt{5}t) \times 2 + s \times 1 = 0$

$5s + 2\sqrt{5}t = 0 \quad \text{--- ①'}$

② かつ

$(2s + \sqrt{5}t) \times \sqrt{5} + (\sqrt{11}t - 2\sqrt{5}) \times \sqrt{11} = 0$

$\sqrt{5}s + 8t - 6\sqrt{5} = 0 \quad \text{--- ②'}$

①' ②' を解く

$s = -2\sqrt{11}, t = \sqrt{55}$

$\vec{cH} = -2\sqrt{11}\vec{a} + \sqrt{55}\vec{b}$

$= (\sqrt{11}, -2\sqrt{11}, 11\sqrt{5}) \quad \therefore \underline{\underline{H(\sqrt{11}, -2\sqrt{11}, 11\sqrt{5})}}$

氏名

--

数学解答紙 [その2]

受験番号

--	--	--	--	--

2

評点欄

2

1回の試行において、赤玉を取り出す確率は $\frac{1}{5}$ 、白玉を取り出す確率は $\frac{4}{5}$ である。

(1) 2回の試行を繰り返したときの得点が0でない事象を A とする。求める確率 $P(A)$ は

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} \quad \dots \text{答}$$

また、3回の試行を繰り返したときの得点が0でない事象を B とする。

事象 A と事象 B が同時に起こるのは次の2通りである。

[1] 2回目までに白玉が取り出された回数が2となる

[2] 2回目までに赤玉が取り出された回数が1であり、3回目に白玉が取り出される

この確率 $P(A \cap B)$ は
$$P(A \cap B) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + {}_2C_1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{112}{125}$$

よって、求める条件付き確率は $P_A(B)$ であるから

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{112}{125} \times \frac{25}{24} = \frac{14}{15} \quad \dots \text{答}$$

(2) $n=1$ のとき
$$E_1 = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$n \geq 2$ のとき、とり得る得点を X 、確率を p_X とすると、確率分布図は次のようになる。

X	0	$n-1$	n	計
p_X	p_0	p_{n-1}	p_n	1

$$p_{n-1} = {}_n C_1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{4^{n-1} \cdot n}{5^n}, \quad p_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

求める期待値 E_n は
$$E_n = 0 \times p_0 + (n-1) \cdot p_{n-1} + n \cdot p_n = \frac{4^{n-1} \cdot n(n+3)}{5^n}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。よって、
$$E_n = \frac{4^{n-1} \cdot n(n+3)}{5^n} \quad \dots \text{答}$$

(3) $E_n > E_{n+1}$ を満たすとき
$$\frac{E_n}{E_{n+1}} > 1 \quad (\because E_{n+1} > 0)$$

ここで
$$\frac{E_n}{E_{n+1}} = \frac{\frac{4^{n-1} \cdot n(n+3)}{5^n}}{\frac{4^n \cdot (n+1)(n+4)}{5^{n+1}}} = \frac{5n(n+3)}{4(n+1)(n+4)} \quad \text{なので} \quad \frac{5n(n+3)}{4(n+1)(n+4)} > 1$$

よって
$$n^2 - 5n - 16 > 0 \quad \text{より} \quad n < \frac{5 - \sqrt{89}}{2}, \quad \frac{5 + \sqrt{89}}{2} < n$$

$9 < \sqrt{89} < 10$ であり、 n は自然数なので $n \geq 8$ よって、求める必要十分条件は $n \geq 8$... 答

同様に、 $E_n < E_{n+1}$ を満たす n は $1 \leq n \leq 7$

したがって $E_1 < E_2 < \dots < E_7 < E_8 > E_9 > \dots$ となり、 E_n が最大となる n は $n=8$... 答



氏名

数学解答紙 [その3]

受験番号

3

(1) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は、

$$8 \sin x - \tan x = 0 \text{ を解くと、}$$

$$8 \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\sin x (8 \cos x - 1) = 0.$$

$$\sin x = 0, \cos x = \frac{1}{8} \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $\cos x = \frac{1}{8}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たす x の値を

α とすると、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ より、

①の解は、 $x = 0, \pm\alpha$. よって、3個

(2) $f'(x) = 8 \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$

$$= \frac{8 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(2 \cos x - 1)(4 \cos^2 x + 2 \cos x + 1)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(2 \cos x - 1) \left\{ 4 \left(\cos x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\}}{\cos^2 x}$$

$f'(x) = 0$ とすると、 $\cos x = \frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ より、 $x = \pm \frac{\pi}{3}$.

よって、 $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$...	$-\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	/	-	0	+	0	-	/
$f(x)$	/	↘	$-3\sqrt{3}$	↗	$3\sqrt{3}$	↘	/

$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ で、単調に増加し、

$-\frac{\pi}{2} < x \leq -\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ で、単調に減少する。

$x = \frac{\pi}{3}$ で、極大値 $= 3\sqrt{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ で、極小値 $= -3\sqrt{3}$

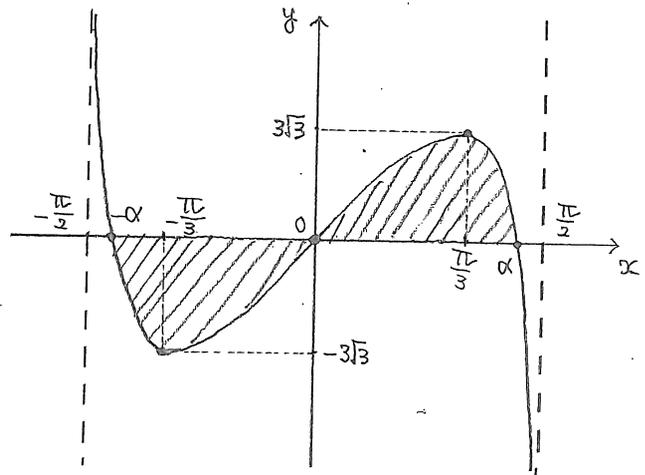
評点欄

3

(3) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = -\infty$.

よって、求める面積は、下図の斜線部分となる。



また、 $f(-x) = 8 \sin(-x) - \tan(-x)$

$= -8 \sin x + \tan x = -f(x)$ より、

$f(x)$ は奇関数となり、曲線 $y = f(x)$ のグラフは、

原点に關して対称なため、求める面積は、

$$2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\alpha} (8 \sin x - \tan x) dx$$

$$= 2 [-8 \cos x + \log |\cos x|]_0^{\alpha}$$

$$= 2 \{ (-8 \cos \alpha + \log |\cos \alpha|) - (-8 + \log 1) \}$$

$$= 2 \left(-8 \cdot \frac{1}{8} + \log \frac{1}{8} + 8 \right) \quad (\because \cos \alpha = \frac{1}{8} \text{ より})$$

$$= 14 - 6 \log 2$$



氏名

--

数学解答紙 [その4]

受験番号

--	--	--	--	--	--

4

(1). 点 i と点 $1+i$ を通る直線は、
 $y=1$ かつ、点 z は、 $z=p+i$ (p : 実数) とおける

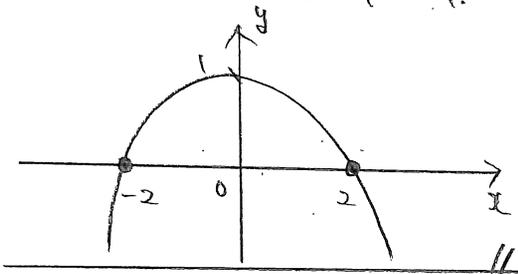
$$W = -iz^2$$

$$= -i(p+i)^2 = 2p + (1-p^2)i$$

$W = X + Yi$ とおくと、 (X, Y) : 実数

$$\begin{cases} X = 2p \\ Y = 1-p^2 \end{cases} \text{ かつ } Y = -\frac{1}{4}X^2 + 1$$

よって、図形 C は、放物線 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ であり、右図



(2). 原点と点 $2+i$ を通る直線は、 $y = \frac{1}{2}x$ かつ、

点 z は、 $z = t(2+i)$ (t : 実数) とおける

$$W = -iz^2$$

$$= -it^2(2+i)^2$$

$$= 4t^2 - 3t^2i$$

$W = X' + Y'i$ とおくと、 (X', Y') : 実数

$$\begin{cases} X' = 4t^2 \\ Y' = -3t^2 \end{cases} \text{ かつ } Y' = -\frac{3}{4}X'$$

$$t^2 = \frac{1}{4}X' \geq 0 \text{ かつ } X' \geq 0$$

よって、図形 L は、 $y = -\frac{3}{4}x, x \geq 0$ かつ

原点を端とする半直線であることを示す。

示す。 //

(3). 図形 C と半直線 L と

連立すると、

$$-\frac{1}{4}x^2 + 1 = -\frac{3}{4}x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x = 4, -1$$

$x \geq 0$ かつ、交点は、 $4 - 3i$ //

よって、 $(4, -3)$ を通る図形 C の接線は、

$y = -2x + 5$ かつ、 x 軸と α 正方向

な角 α とおくと、 $\tan \alpha = -2$ かつ $\alpha \in \pi$

よって、半直線 L と、 x 軸と α 正方向な角 $\beta \in \pi$

と β とおくと、 $\tan \beta = -\frac{3}{4}$ かつ $\beta \in \pi$ 。

よって、

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)|$$

$$= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{-2 - (-\frac{3}{4})}{1 + (-2) \cdot (-\frac{3}{4})} \right|$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2} //$$

評点欄

4

