平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) 2点P，Qはそれぞれ辺OA，OBを $t:(1-t)$ に内分する点なので

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=t\vec{b}-t\vec{a}$ …答

点Lは辺BCを $s:(1-s)$ に内分する点なので　$\overrightarrow{OL}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$ …答

点Mは辺ACを $s:(1-s)$ に内分する点なので　$\overrightarrow{OM}=(1-s)\vec{a}+s\vec{c}$ …答

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ であり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ なので

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{PL}|^2&=|\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OP}|^2=|(1-s)\vec{b}+s\vec{c}-t\vec{a}|^2\\
&=(1-s)^2|\vec{b}|^2+s^2|\vec{c}|^2+t^2|\vec{a}|^2+2s(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-2st\vec{c}\cdot\vec{a}-2t(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}\\
&=(1-s)^2+s^2+t^2+s(1-s)-st-t(1-s)\\
&=s^2-s+t^2-t+1
\end{aligned}
$$
…答

(3) (2)より $|\overrightarrow{PL}|^2=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ であり $\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\geqq0$，$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\geqq0$ なので，

$s=t=\frac{1}{2}$ のとき $|\overrightarrow{PL}|^2$ の最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。 …答

このとき，4点P，Q，L，Mはそれぞれ辺OA，OB，BC，ACの中点なので

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{QL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

ここで

$$\left|\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{b}-\vec{a}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2)=\frac{1}{4}\left(1-2\cdot\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}$$

$$\left|\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|\geqq0 \quad より \quad \left|\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=\frac{1}{2}$$

また　$\left|\frac{1}{2}\vec{c}\right|=\frac{1}{2}|\vec{c}|=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

よって，　PQ=QL=LM=MP

さらに

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c}=\frac{1}{4}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c})=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

よって　PQ⊥PM

以上より，四角形PQLMは正方形である。

（証明終わり）

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その二〕

受験番号

2

評点欄

2

(1). $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ … ①

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ … ②

②から. $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$

これと①を比較して.

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}$$

よって, α,βは2次方程式

$x^2-x-6=0$ … ③ の2つの解である。

③から. $(x+2)(x-3)=0$

$x=-2,3$

したがって. $\underline{(\alpha,\beta)=(-2,3),(3,-2)}$

(2). (1)から. $(\alpha,\beta)=(-2,3),(3,-2)$を②に代入して.

$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$ … ④

$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$ … ⑤

④から.数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$は,

初項$a_2+2a_1=15$,公比3の等比数列なので.

$a_{n+1}+2a_n=15\cdot3^{n-1}$

$=5\cdot3^n$ … ⑥

⑤から,数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$は,

初項$a_2-3a_1=10$,公比-2の等比数列なので

$a_{n+1}-3a_n=10\cdot(-2)^{n-1}$

$=-5\cdot(-2)^n$ … ⑦

⑥−⑦から,

$5a_n=5\cdot3^n+5\cdot(-2)^n$

したがって. $\underline{a_n=3^n+(-2)^n}$

(3). $a_n=3^n+(-2)^n$ から.

$a_{3n}=3^{3n}+(-2)^{3n}$

$=(3^n)^3+((-2)^n)^3$

$=(3^n+(-2)^n)((3^n)^2-3^n\cdot(-2)^n+((-2)^n)^2)$

$=a_n\cdot(3^{2n}-(-6)^n+(-2)^{2n})$ … ⑧

すべての自然数nに対して.

$3^{2n}-(-6)^n+(-2)^{2n}$ は整数 … ⑨

⑧,⑨から.

a_{3n}は.a_nの倍数

したがって.

すべての自然数nに対して.

a_{3n}は.a_nで割り切れる □.

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その三〕　受験番号

評点欄

3

3

(1). $F(x) = (f(x)+g(x))^3 + (f(x)-g(x))^3$

$= 2f(x)(\{f(x)\}^2 + 3\{g(x)\}^2)$ …①

よって、$F(x)$は$f(x)$で割り切れることが示された。//

(2). $F(x)$は$(x-\alpha)^2$で割り切れるので、

$F(\alpha)=0$を満たし、整式$F_1(x)$を用いて、

$F(x)=(x-\alpha)^2 F_1(x)$ …② とおける。

①に$x=\alpha$を代入すると、

$F(\alpha)=2f(\alpha)(\{f(\alpha)\}^2+3\{g(\alpha)\}^2)=0$

このとき、$f(\alpha)\neq 0$とすると

$\{f(\alpha)\}^2+3\{g(\alpha)\}^2=0$

これは、$\{f(\alpha)\}^2=0$ かつ $\{g(\alpha)\}^2=0$ より

$f(\alpha)\neq 0$のとき成り立たない。

したがって、$f(\alpha)=0$であり、$f(x)$は

$x-\alpha$で割り切れるので、整式$f_1(x)$を用いて、

$f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$ … ③ とおける。

①に、②、③を代入すると、

$(x-\alpha)^2 F_1(x)$

$= 2(x-\alpha)f_1(x)((x-\alpha)^2\{f_1(x)\}^2+3\{g(x)\}^2)$

$(x-\alpha)F_1(x)$

$=2f_1(x)((x-\alpha)^2\{f_1(x)\}^2+3\{g(x)\}^2)$ …④

④に$x=\alpha$を代入すると

$0=2f_1(\alpha)\cdot 3\{g(\alpha)\}^2$

このとき、$f_1(\alpha)\neq 0$とすると$\{g(\alpha)\}^2=0$であり、

$g(\alpha)=0$をみたす

よって、$g(x)$は$x-\alpha$で割り切れるので、

整式$g_1(x)$を用いて、$g(x)=(x-\alpha)g_1(x)$ …⑤とおける

④に⑤を代入すると、

$(x-\alpha)F_1(x)=2f_1(x)((x-\alpha)^2\{f_1(x)\}^2+3(x-\alpha)^2\{g_1(x)\}^2)$

$=2(x-\alpha)^2 f_1(x)(\{f_1(x)\}^2+\{g_1(x)\}^2)$

$F_1(x)=2(x-\alpha)f_1(x)(\{f_1(x)\}^2+\{g_1(x)\}^2)$

これは、$F_1(x)$が$x-\alpha$で割り切れることを表すが、

②とあわせて、$F(x)$が$(x-\alpha)^3$で割り切れることとなり、条件に反する。

よって、$f_1(\alpha)=0$であり、$f_1(x)$は$x-\alpha$で

割り切れるので、整式$f_2(x)$を用いて、

$f_1(x)=(x-\alpha)f_2(x)$ …⑥ とおける。

③に代入すると、$f(x)=(x-\alpha)^2 f_2(x)$となり

$f(x)$は$(x-\alpha)^2$で割り切れることが示された。//

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その四〕

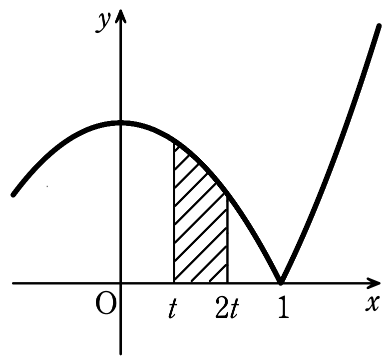
受験番号

評点欄

④

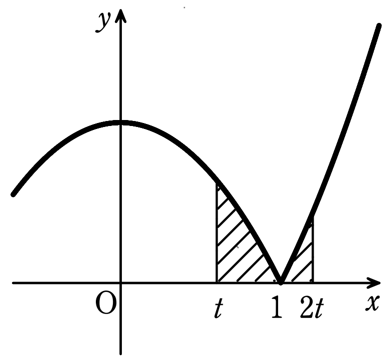
4

(1) $\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{1}{2} \leqq 2t \leqq 1$ なので



$$S(t)=\int_t^{2t}-(x^2-1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_t^{2t}$$
$$=-\frac{7}{3}t^3+t$$
…答

(2) $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき　$1 \leqq 2t \leqq 2$ なので



$$S(t)=\int_t^{1}-(x^2-1)\,dx+\int_1^{2t}(x^2-1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_t^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^{2t}$$
$$=3t^3-3t+\frac{4}{3}$$
…答

(3) (i) $\dfrac{1}{4}<t<\dfrac{1}{2}$ のとき　$S'(t)=-7t^2+1$

$S'(t)=0$ とすると $\dfrac{1}{4}<t<\dfrac{1}{2}$ より　$t=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

(ii) $\dfrac{1}{2}<t<1$ のとき　$S'(t)=9t^2-3$

$S'(t)=0$ とすると $\dfrac{1}{2}<t<1$ より　$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

以上から，$\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\frac{1}{4}$	…	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	…	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	…	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{41}{192}$	↗	$\frac{2\sqrt{7}}{21}$	↘	$\frac{5}{24}$	↘	$\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$	↗	$\frac{4}{3}$

ここで　$\dfrac{2\sqrt{7}}{21}<1<\dfrac{4}{3}$

また　$1.7<\sqrt{3}$ より　$\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}<0.2<\dfrac{41}{192}$

以上から，　$t=1$ のとき最大値 $\dfrac{4}{3}$，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$ をとる。　…答