平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

$\boxed{1}$

1

(1) 2点P，Qはそれぞれ辺OA，OBを $t:(1-t)$ に内分する点なので

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=t\vec{b}-t\vec{a}$$ …答

点Lは辺BCを $s:(1-s)$ に内分する点なので　$\overrightarrow{OL}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$ …答

点Mは辺ACを $s:(1-s)$ に内分する点なので　$\overrightarrow{OM}=(1-s)\vec{a}+s\vec{c}$ …答

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ であり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ なので

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PL}|^2&=|\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OP}|^2=|(1-s)\vec{b}+s\vec{c}-t\vec{a}|^2\\&=(1-s)^2|\vec{b}|^2+s^2|\vec{c}|^2+t^2|\vec{a}|^2+2s(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-2st\vec{c}\cdot\vec{a}-2t(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=(1-s)^2+s^2+t^2+s(1-s)-st-t(1-s)\\&=s^2-s+t^2-t+1\end{aligned}$$ …答

(3) (2)より　$|\overrightarrow{PL}|^2=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$　であり $\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\geqq0$，$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\geqq0$ なので，

$s=t=\frac{1}{2}$ のとき $|\overrightarrow{PL}|^2$ の最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。 …答

このとき，4点P，Q，L，Mはそれぞれ辺OA，OB，BC，ACの中点なので

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{QL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

ここで

$$\left|\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{b}-\vec{a}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2)=\frac{1}{4}\left(1-2\cdot\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}$$

$$\left|\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|\geqq0\quad\text{より}\quad\left|\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=\frac{1}{2}$$

また　$\left|\frac{1}{2}\vec{c}\right|=\frac{1}{2}|\vec{c}|=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

よって，　PQ=QL=LM=MP

さらに

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c}=\frac{1}{4}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c})=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

よって　$PQ\perp PM$

以上より，四角形PQLMは正方形である。

（証明終わり）

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その二〕

受験番号

2

評点欄

2

(1). $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ …①

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ …②

②から. $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$

これと①を比較して.

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}$$

よって, α,βは2次方程式

$x^2-x-6=0$ …③の2つの解である。

③から. $(x+2)(x-3)=0$

$x=-2,3$

したがって. $\underline{(\alpha,\beta)=(-2,3),(3,-2)}$ //

(2). (1)から. $(\alpha,\beta)=(-2,3),(3,-2)$を②に代入して.

$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$ …④.

$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$ …⑤

④から.数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$は,

初項$a_2+2a_1=15$,公比3の等比数列なので.

$a_{n+1}+2a_n=15\cdot 3^{n-1}$

$=5\cdot 3^n$ …⑥.

⑤から,数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$は,

初項$a_2-3a_1=10$,公比-2の等比数列なので

$a_{n+1}-3a_n=10\cdot(-2)^{n-1}$

$=-5\cdot(-2)^n$ …⑦.

⑥−⑦から,

$5a_n=5\cdot 3^n+5\cdot(-2)^n$

したがって. $\underline{a_n=3^n+(-2)^n}$ //

(3). $a_n=3^n+(-2)^n$から.

$a_{3n}=3^{3n}+(-2)^{3n}$

$=(3^n)^3+((-2)^n)^3$

$=(3^n+(-2)^n)((3^n)^2-3^n\cdot(-2)^n+((-2)^n)^2)$

$=a_n\cdot(3^{2n}-(-6)^n+(-2)^{2n})$ …⑧.

すべての自然数nに対して.

$3^{2n}-(-6)^n+(-2)^{2n}$は整数 …⑨.

⑧,⑨から.

a_{3n}は. a_nの倍数

したがって.

すべての自然数nに対して.

a_{3n}は. a_nで割り切れる □.

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その三〕

受験番号

3

評点欄

③

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}=1-\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ と変形できるので $f(x)=1$ より

$\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}=0$ 　　$\therefore$ $2x+2=0$ 　　$\therefore$ $x=-1$ 　　…㊟

(2) $f(x)=1-\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ より

$$f'(x)=\frac{-2(x^2+2x+2)+2(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-2x^2-4x-4+4x^2+8x+4}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$ …㊟

よって，$f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$

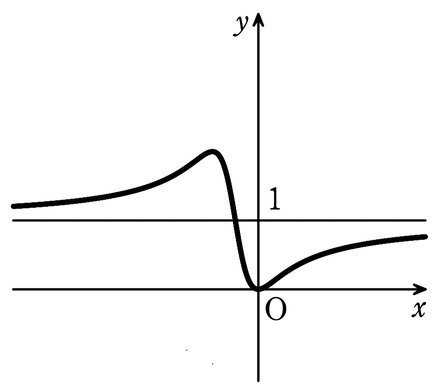
したがって，$x=-2$ のとき極大値 2，$x=0$ のとき極小値 0 をとる。

また，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)=1-0=1$$ …㊟

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)=1-0=1$$ …㊟

(3) (2) より $y=f(x)$ のグラフは右のようになる。



(4) (3) のグラフより　　$-3\leqq x\leqq -1$ のとき　$f(x)-1\geqq 0$

$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　$f(x)-1\leqq 0$　であるから

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0}|f(x)-1|\,dx&=\int_{-3}^{-1}(f(x)-1)\,dx+\int_{-1}^{0}(1-f(x))\,dx\\&=-\int_{-3}^{-1}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int_{-1}^{0}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx\\&=-\Big[\log(x^2+2x+2)\Big]_{-3}^{-1}+\Big[\log(x^2+2x+2)\Big]_{-1}^{0}\\&=-(\log 1-\log 5)+(\log 2-\log 1)\\&=\log 5+\log 2\\&=\log 10\end{aligned}$$

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1) 複素数 α, β の偏角をそれぞれ θ, φ とすると

α の偏角は　$\cos\theta=0$, $\sin\theta=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で θ の値は　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　　$\therefore$ $\arg\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　…答

β の偏角は　$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で φ の値は　$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　$\therefore$ $\arg\beta=\dfrac{\pi}{6}$　…答

(2) 点 α を中心として，点 β を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 γ は

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

より

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\{(\sqrt{3}+i)-i\}+i=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$$ …答

(3) α, β を極形式で表すと

$$\alpha=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\beta=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

なので

$$\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^n=\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}{1}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\left(\frac{\beta}{|\beta|}\right)^n=\left\{\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{2}\right\}^n=\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}$$

条件より

$$\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}=\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}$$

偏角を比較して，整数 k を用いて

$$\frac{n\pi}{2}=\frac{n\pi}{6}+2k\pi \qquad \therefore\ n=6k$$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=6$　…答