後期日程

平成31年度入学試験問題（後期日程）

数　学

（理工学部）

―――――― 解答上の注意事項 ――――――

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。

2. 問題冊子1冊および解答紙4枚がある。解答紙は1枚ずつ切り離して使用すること。

3. 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ まで4問ある。各問の解答は所定の解答紙にのみ記入すること。

4. 解答紙の裏面を使う場合は，続きの解答を裏面の仕切り線の下に記入すること。

5. 解答しない問題がある場合でも，解答紙4枚すべてを提出すること。

6. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 一辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする。また，辺OA，OBを$t:(1-t)$に内分する点をそれぞれP，Qとし，辺BC，ACを$s:(1-s)$に内分する点をそれぞれL，Mとする。ただし，$s$と$t$は，それぞれ$0<s<1$および$0<t<1$をみたす実数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$s$，$t$を用いて表せ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PL}}\right|^2$を$s$，$t$を用いて表せ。

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PL}}\right|^2$の最小値とそのときの$s$，$t$の値を求めよ。さらに，このとき四角形PQLMが正方形となることを示せ。

$\boxed{2}$ $a_1 = 1$，$a_2 = 13$，および

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定まる自然数の数列 $\{a_n\}$ について，次の問に答えよ。

(1) 等式

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

をみたす数の組 (α, β) を 2 つ求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して，a_{3n} は a_n で割り切れることを示せ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$ のグラフを C とするとき，次の問に答えよ。

(1) $f(x) = 1$ をみたす x の値を求めよ。

(2) 導関数 $f'(x)$ を求め，$f(x)$ の極値をすべて求めよ。また，極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

を求めよ。

(3) 曲線 C の概形をかけ。ただし，凹凸，変曲点を調べる必要はないものとする。

(4) 定積分

$$\int_{-3}^{0} |f(x) - 1|dx$$

を求めよ。

$\boxed{4}$ iを虚数単位とする。$\alpha = i$，$\beta = \sqrt{3} + i$とするとき，次の問に答えよ。

(1) αとβの偏角を0以上2π未満の範囲で求めよ。

(2) 点αを中心として，点βを$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転させた点γを求めよ。

(3) 等式$\left(\dfrac{\alpha}{|\alpha|}\right)^n = \left(\dfrac{\beta}{|\beta|}\right)^n$をみたす最小の自然数$n$を求めよ。