平成31年度入学試験（教育学部）

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その一〕

受験番号

1

評点欄

1

(1) $t=\sin x+\cos x$ より，両辺を２乗して

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x$$

$\therefore\quad \sin 2x=t^2-1$ …答

(2) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

であり，x がすべての実数を動くので

$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1\qquad \therefore\quad -\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ …答

(3) $\sin 2x-2\sqrt{2}\,a(\sin x+\cos x)+6a+1=0$

$\Leftrightarrow\ (t^2-1)-2\sqrt{2}\,at+6a+1=0\qquad$ （$\because$ (1) より）

$\Leftrightarrow\ t^2-2\sqrt{2}\,at+6a=0$

ここで $f(t)=t^2-2\sqrt{2}\,at+6a$ とおくと，与えられている方程式が実数解をもつためには

$f(t)=0$ が $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲で実数解をもてばよい。

(i) $a<-1$ のとき

$f(-\sqrt{2})\leqq 0$ かつ $f(\sqrt{2})\geqq 0$

$\Leftrightarrow\ 10a+2\leqq 0$ かつ $2a+2\geqq 0$

$\Leftrightarrow\ -1\leqq a\leqq -\frac{1}{5}$

これは $a<-1$ に不適である。

(ii) $-1\leqq a\leqq 0$ のとき

$f(t)=0$ の判別式を D とすると，

$D\geqq 0$ かつ $f(\sqrt{2})\geqq 0$

$\Leftrightarrow\ \frac{D}{4}=2a^2-6a\geqq 0$ かつ $2a+2\geqq 0$

$\Leftrightarrow\ (a\leqq 0$ または $3\leqq a)$ かつ $a\geqq -1$

$\therefore\quad -1\leqq a\leqq 0$

(iii) $0<a\leqq 1$ のとき

$D\geqq 0$ かつ $f(-\sqrt{2})\geqq 0$

$\Leftrightarrow\ \frac{D}{4}=2a^2-6a\geqq 0$ かつ $10a+2\geqq 0$

$\Leftrightarrow\ (a\leqq 0$ または $3\leqq a)$ かつ $a\geqq -\frac{1}{5}$

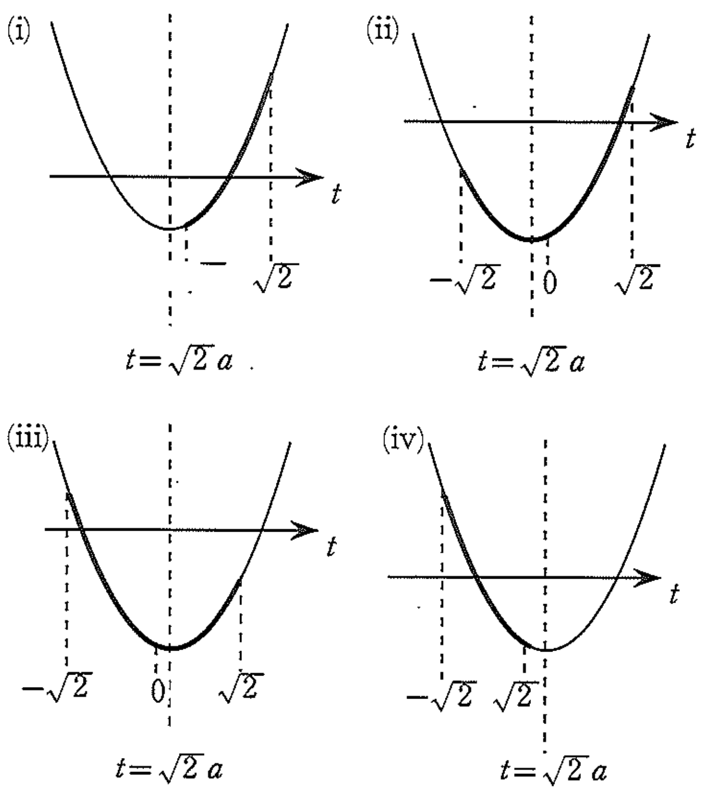
$\therefore\quad -\frac{1}{5}\leqq a\leqq 0$

これは $0<a\leqq 1$ に不適である。

(iv) $a\geqq 1$ のとき

$f(-\sqrt{2})\geqq 0$ かつ $f(\sqrt{2})\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ a\geqq -\frac{1}{5}$ かつ $a\leqq -1$ となり不適である。



以上，(i)，(ii)，(iii)，(iv) より　$-1\leqq a\leqq 0$ …答

平成31年度入学試験（教育学部）

氏　　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

2

評点欄

②

(1)　放物線 $C : y=x^2$ と直線 $\ell : y=2ax-a^3$ から y を消去して

$x^2=2ax-a^3$　　　$\therefore$　$x^2-2ax+a^3=0$　…①

C と ℓ が異なる2点で交わるとき，方程式①が異なる2つの実数解をもてばよいので

①の判別式を D とすると条件は $D>0$ である。

$$\frac{D}{4}=a^2-a^3>0$$

$\Leftrightarrow$　$a^2(1-a)>0$

$a>0$ より $a^2>0$ なので　$1-a>0$

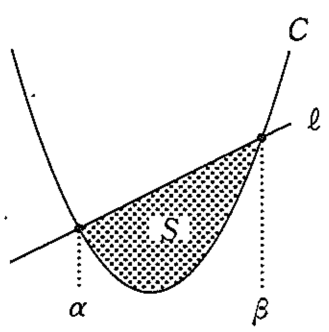
$\therefore$　$a<1$

したがって，$a>0$ より　$0<a<1$　…答

(2)　$0<a<1$ のとき方程式①より　$x=a\pm\sqrt{a^2-a^3}$

ここで，$\alpha=a-\sqrt{a^2-a^3}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-a^3}$ とおくと求める面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{(2ax-a^3)-x^2\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{a^2-a^3})^3$$
$$=\frac{4}{3}(a^2-a^3)^{\frac{3}{2}}$$



…答

(3)　$g(a)=a^2-a^3$　$(0<a<1)$ とおくと

$g'(a)=2a-3a^2=a(2-3a)$

$g'(a)=0$ とすると，$a=0$，$\frac{2}{3}$

$0<a<1$ の範囲で $g(a)$ の増減表を書くと下のようになる。

a	0	…	$\frac{2}{3}$	…	1
$g'(a)$		+	0	−	
$g(a)$		↗	$\frac{4}{27}$	↘	

増減表より $g(a)$ は $a=\frac{2}{3}$ のとき，最大値 $\frac{4}{27}$ をとる。

$g(a)$ が最大となるとき，S も最大となるので，$a=\frac{2}{3}$ のとき S は最大値 $\frac{32\sqrt{3}}{729}$ をとる。　…答

氏　　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

3

評点欄

3

(1) $\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ -1)$, $\overrightarrow{OB}=(0,\ 1,\ 1)$ より，

$|\overrightarrow{OA}|=1^2+0^2+(-1)^2=2$, $|\overrightarrow{OB}|=0^2+1^2+1^2=2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot0+0\cdot1+(-1)\cdot1=-1$

であるから，

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot2-(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ …答

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s(1,\ 0,\ -1)+t(0,\ 1,\ 1)=(s,\ t,\ -s+t)$ より

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=(s,\ t,\ -s+t)-(1,\ 1,\ 1)=(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)$

$\overrightarrow{CP}\perp$(平面OAB) なので　$\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{OB}$

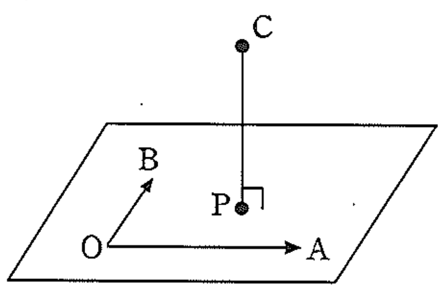
よって，

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より　$(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)\cdot(1,\ 0,\ -1)=0$

$\therefore$　$2s-t=0$　…①

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より　$(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)\cdot(0,\ 1,\ 1)=0$

$\therefore$　$-s+2t-2=0$　…②



①，②より　$s=\dfrac{2}{3}$, $t=\dfrac{4}{3}$ …答

これより　$\overrightarrow{CP}=\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$ …答

(3)

（証明）

(2)より　$|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

であり，$|\overrightarrow{OE}|=k|\overrightarrow{CP}|$, $|\overrightarrow{OE}|=\alpha$ なので

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}k$　　$\therefore$　$k=\dfrac{3}{2}$

よって，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CP}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ となるから　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\left(-\dfrac{1}{2},\ 1,\ -1\right)$

また，Gが△ABCの重心であることから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

ここで，

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right)=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=0$$

となり，$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{DE}$ である。

（証明終わり）