平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1)

(i) $t=0,9,10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじがちょうど1本となる確率は0である。

(ii) $t\neq 0,9,10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじがちょうど1本となるのは

「当たり → はずれ → はずれ」または「はずれ → 当たり → はずれ」または「はずれ → はずれ → 当たり」

のときであるから，求める確率は

$$\frac{t}{10}\cdot\frac{10-t}{9}\cdot\frac{9-t}{8}+\frac{10-t}{10}\cdot\frac{t}{9}\cdot\frac{9-t}{8}+\frac{10-t}{10}\cdot\frac{9-t}{9}\cdot\frac{t}{8}=\frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$

であり，これは，$t=0,9,10$ のときも成り立つ。よって，求める確率は

$$\frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$ …答

である。

(2)

(i) $t=8,9,10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじが0本となる確率は0である。

(ii) $t\neq 8,9,10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじが0本となるのは3回ともはずれを引いたときなので

求める確率は

$$\frac{10-t}{10}\cdot\frac{9-t}{9}\cdot\frac{8-t}{8}$$

であり，これは，$t=8,9,10$ のときも成り立つ。よって，求める確率 $P(t)$ は

$$P(t)=\frac{t(10-t)(9-t)}{240}+\frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720}=\frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360}$$ …答

である。

(3) $P(t)\leqq\frac{1}{2}$ より　$\frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360}\leqq\frac{1}{2}$

$\therefore\ (t-5)(t^2-10t-36)\leqq 0$　…①

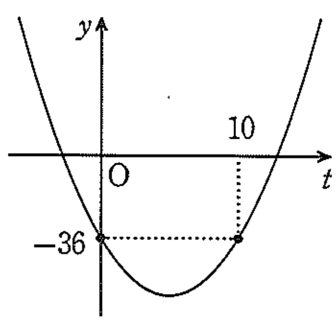
ここで，$f(t)=t^2-10t-36$ とおくと

$f(t)=(t-5)^2-61$，$f(0)=f(10)=-36$

であるから，$y=f(t)$ のグラフより $0\leqq t\leqq 10$ において　$f(t)<0$

よって，不等式①より　$t-5\geqq 0$　$\therefore\ t\geqq 5$

これと $0\leqq t\leqq 10$ から，求める整数 t の値は　5，6，7，8，9，10 …答



平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1)　$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{OB}=(0,\ 1,\ 1)$ より，

$$|\overrightarrow{OA}|=1^2+0^2+(-1)^2=2,\quad |\overrightarrow{OB}|=0^2+1^2+1^2=2,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot0+0\cdot1+(-1)\cdot1=-1$$

であるから，

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot2-(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

…答

(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s(1,\ 0,\ -1)+t(0,\ 1,\ 1)=(s,\ t,\ -s+t)$ より

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=(s,\ t,\ -s+t)-(1,\ 1,\ 1)=(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)$$

$\overrightarrow{CP}\perp$(平面OAB)なので　$\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{OB}$

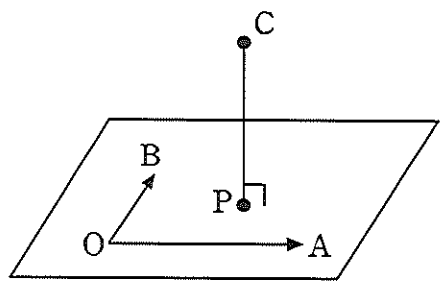
よって，

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より　$(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)\cdot(1,\ 0,\ -1)=0$

$\therefore\ 2s-t=0$　…①

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より　$(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)\cdot(0,\ 1,\ 1)=0$

$\therefore\ -s+2t-2=0$　…②



①，②より　$s=\frac{2}{3}$，$t=\frac{4}{3}$　…答

これより　$\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$　…答

(3)

(証明)

(2)より　$|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

であり，$|\overrightarrow{OE}|=k|\overrightarrow{CP}|$，$|\overrightarrow{OE}|=\alpha$ なので

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}k\qquad \therefore\ k=\frac{3}{2}$$

よって，$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ となるから　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right)$

また，Gが△ABCの重心であることから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

ここで，

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right)=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=0$$

となり，$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{DE}$ である。

(証明終わり)

氏　　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1)　$t=\sin x+\cos x$ より，両辺を２乗して

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x$$

$$\therefore\quad \sin 2x=t^2-1$$

…答

(2)　$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

であり，x がすべての実数を動くので

$$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1\qquad\qquad \therefore\quad -\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

…答

(3)　$\sin 2x-2\sqrt{2}\,a(\sin x+\cos x)+6a+1=0$

$\Leftrightarrow$　$(t^2-1)-2\sqrt{2}\,at+6a+1=0$　　（$\because$ (1) より）

$\Leftrightarrow$　$t^2-2\sqrt{2}\,at+6a=0$

ここで $f(t)=t^2-2\sqrt{2}\,at+6a$ とおくと，与えられている方程式が実数解をもつためには

$f(t)=0$ が $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲で実数解をもてばよい。

(i)　$a<-1$ のとき

$f(-\sqrt{2})\leqq 0$ かつ $f(\sqrt{2})\geqq 0$

$\Leftrightarrow$　$10a+2\leqq 0$ かつ $2a+2\geqq 0$

$\Leftrightarrow$　$-1\leqq a\leqq -\dfrac{1}{5}$

これは $a<-1$ に不適である。

(ii)　$-1\leqq a\leqq 0$ のとき

$f(t)=0$ の判別式を D とすると，

$D\geqq 0$ かつ $f(\sqrt{2})\geqq 0$

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{D}{4}=2a^2-6a\geqq 0$ かつ $2a+2\geqq 0$

$\Leftrightarrow$　($a\leqq 0$ または $3\leqq a$) かつ $a\geqq -1$

$\therefore$　$-1\leqq a\leqq 0$

(iii)　$0<a\leqq 1$ のとき

$D\geqq 0$ かつ $f(-\sqrt{2})\geqq 0$

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{D}{4}=2a^2-6a\geqq 0$ かつ $10a+2\geqq 0$

$\Leftrightarrow$　($a\leqq 0$ または $3\leqq a$) かつ $a\geqq -\dfrac{1}{5}$

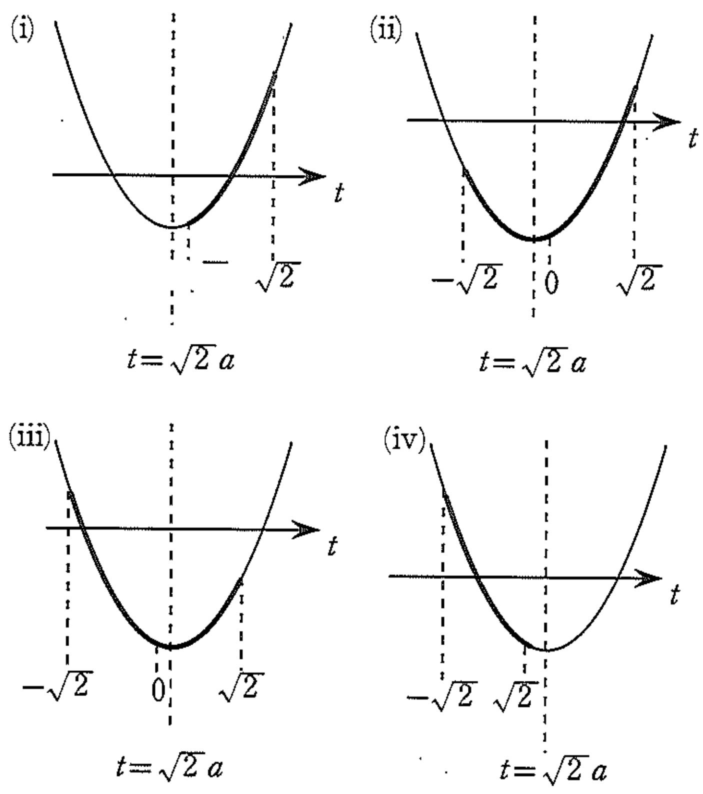
$\therefore$　$-\dfrac{1}{5}\leqq a\leqq 0$

これは $0<a\leqq 1$ に不適である。

(iv)　$a\geqq 1$ のとき

$f(-\sqrt{2})\geqq 0$ かつ $f(\sqrt{2})\leqq 0$

$\Leftrightarrow$　$a\geqq -\dfrac{1}{5}$ かつ $a\leqq -1$ となり不適である。



以上，(i)，(ii)，(iii)，(iv) より　　$-1\leqq a\leqq 0$

…答

氏　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1)　放物線 $C: y=x^2$ と直線 $\ell: y=2ax-a^3$ から y を消去して

$$x^2=2ax-a^3 \qquad \therefore\ x^2-2ax+a^3=0 \qquad \cdots①$$

C と ℓ が異なる2点で交わるとき，方程式①が異なる2つの実数解をもてばよいので

①の判別式を D とすると条件は $D>0$ である。

$$\frac{D}{4}=a^2-a^3>0$$

$$\Leftrightarrow\ a^2(1-a)>0$$

$a>0$ より $a^2>0$ なので　$1-a>0$

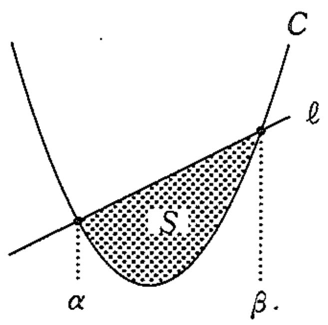
$$\therefore\ a<1$$

したがって，$a>0$ より　$0<a<1$　…答

(2)　$0<a<1$ のとき方程式①より　$x=a\pm\sqrt{a^2-a^3}$

ここで，$\alpha=a-\sqrt{a^2-a^3}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-a^3}$ とおくと求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\{(2ax-a^3)-x^2\}dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{6}(2\sqrt{a^2-a^3})^3\\&=\frac{4}{3}(a^2-a^3)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$



…答

(3)　$g(a)=a^2-a^3\ (0<a<1)$ とおくと

$$g'(a)=2a-3a^2=a(2-3a)$$

$g'(a)=0$ とすると，$a=0,\ \dfrac{2}{3}$

$0<a<1$ の範囲で $g(a)$ の増減表を書くと下のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		↗	$\frac{4}{27}$	↘	

増減表より $g(a)$ は $a=\dfrac{2}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{4}{27}$ をとる。

$g(a)$ が最大となるとき，S も最大となるので，$a=\dfrac{2}{3}$ のとき S は最大値 $\dfrac{32\sqrt{3}}{729}$ をとる。　…答