平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

$\boxed{1}$

$\boxed{1}$

(1)

(i)　$t=0,\ 9,\ 10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじがちょうど1本となる確率は0である。

(ii)　$t\fallingdotseq 0,\ 9,\ 10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじがちょうど1本となるのは

「当たり → はずれ → はずれ」または「はずれ → 当たり → はずれ」または「はずれ → はずれ → 当たり」

のときであるから，求める確率は

$$\frac{t}{10}\cdot\frac{10-t}{9}\cdot\frac{9-t}{8}+\frac{10-t}{10}\cdot\frac{t}{9}\cdot\frac{9-t}{8}+\frac{10-t}{10}\cdot\frac{9-t}{9}\cdot\frac{t}{8}=\frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$

であり，これは，$t=0,\ 9,\ 10$ のときも成り立つ。よって，求める確率は

$$\frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$ …答

である。

(2)

(i)　$t=8,\ 9,\ 10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじが0本となる確率は0である。

(ii)　$t\fallingdotseq 8,\ 9,\ 10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじが0本となるのは3回ともはずれを引いたときなので

求める確率は

$$\frac{10-t}{10}\cdot\frac{9-t}{9}\cdot\frac{8-t}{8}$$

であり，これは，$t=8,\ 9,\ 10$ のときも成り立つ。よって，求める確率 $P(t)$ は

$$P(t)=\frac{t(10-t)(9-t)}{240}+\frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720}=\frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360}$$ …答

である。

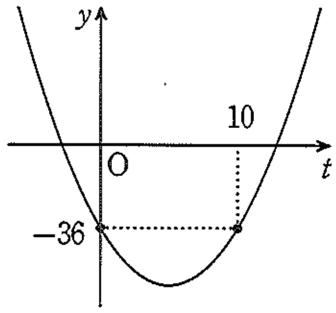
(3)　$P(t)\leqq\frac{1}{2}$ より　$\frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360}\leqq\frac{1}{2}$

$\therefore\ (t-5)(t^2-10t-36)\leqq 0$　…①

ここで，$f(t)=t^2-10t-36$ とおくと

$f(t)=(t-5)^2-61$，$f(0)=f(10)=-36$

であるから，$y=f(t)$ のグラフより $0\leqq t\leqq 10$ において　$f(t)<0$



よって，不等式①より　$t-5\geqq 0$　　$\therefore\ t\geqq 5$

これと $0\leqq t\leqq 10$ から，求める整数 t の値は　5，6，7，8，9，10 …答

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1) $\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ -1)$, $\overrightarrow{OB}=(0,\ 1,\ 1)$ より,

$|\overrightarrow{OA}|=1^2+0^2+(-1)^2=2$, $|\overrightarrow{OB}|=0^2+1^2+1^2=2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot0+0\cdot1+(-1)\cdot1=-1$

であるから,

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot2-(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ …答

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s(1,\ 0,\ -1)+t(0,\ 1,\ 1)=(s,\ t,\ -s+t)$ より

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=(s,\ t,\ -s+t)-(1,\ 1,\ 1)=(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)$

$\overrightarrow{CP}\perp$(平面 OAB) なので　$\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{OB}$

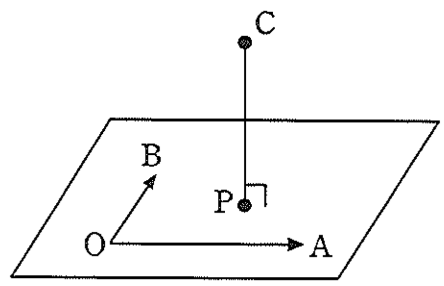
よって,

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より　$(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)\cdot(1,\ 0,\ -1)=0$

$\therefore\ 2s-t=0$　…①

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より　$(s-1,\ t-1,\ -s+t-1)\cdot(0,\ 1,\ 1)=0$

$\therefore\ -s+2t-2=0$　…②



①, ② より　$s=\frac{2}{3}$, $t=\frac{4}{3}$ …答

これより　$\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ …答

(3)

（証明）

(2) より　$|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

であり, $|\overrightarrow{OE}|=k|\overrightarrow{CP}|$, $|\overrightarrow{OE}|=\alpha$ なので

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}k$　　$\therefore\ k=\frac{3}{2}$

よって, $\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ となるから　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right)$

また, G が △ABC の重心であることから

$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

ここで,

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right)=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=0$

となり, $\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{DE}$ である。

（証明終わり）

数学解答紙〔その三〕

氏名

受験番号

評点欄 ③

3

(1). $\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$
$= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx$
$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$
$= \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$
$= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$
$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$
$= \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx$
$= \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx$
$= \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi}$
$= 0.$

(2). $V = \int_0^{\pi} \pi y^2 dx.$

$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\pi} \left(a\sin x + \frac{a}{a-1}\cos x\right)^2 dx$
$= a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx + \frac{2a^2}{a-1}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$

(1)を利用して. $\frac{V}{\pi} = a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2a^2}{a-1}\cdot 0 + \frac{a^2}{(a-1)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$
$= \frac{\pi}{2}\left\{a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2}\right\}$

よって. $V = \frac{\pi^2}{2}\left\{a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2}\right\}$

(3). $f(a) = a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2}$ $(a>1)$ とおくと. $V = \frac{\pi^2}{2}\cdot f(a).$

ここで, $f'(a) = 2a + \frac{2a(a-1)^2 - a^2 2(a-1)}{(a-1)^4}$
$= 2a + \frac{-2a}{(a-1)^3}$
$= \frac{2a}{(a-1)^3}\cdot\{(a-1)^3 - 1\}$
$= \frac{2a}{(a-1)^3}(a-2)(a^2 - a + 1)$
$= \frac{2a}{(a-1)^3}(a-2)\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}$

$a>1$において. $f'(a)=0$ とすると $a=2.$

a	1	…	2	…
$f'(a)$	／	$-$	0	$+$
$f(a)$	／	↘	8	↗

$f(a)$の増減表は. 右のようになり,
$f(a)$は. $a=2$で最小値 8をとる。

$f(a)$が最小のとき. Vも最小となるので,
求める Vの最小値は. $4\pi^2$. ($a=2$のとき)

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

4

評点欄

4

(1)

(証明)

ド･モアブルの定理より　$\alpha^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

また，$\alpha^7=1$ より $\alpha^7-1=0$　　$\therefore\ (\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 1$ なので　$\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0$

(証明終わり)

(2)

(証明)

$|\alpha|=1$ なので $|\alpha|^2=1$ より　$\alpha\overline{\alpha}=1$　　$\therefore\ \overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

このとき，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=2\cos\theta$

これと(1)より

$$
\begin{aligned}
f(\cos\theta)&=8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1=(2\cos\theta)^3+(2\cos\theta)^2-2(2\cos\theta)-1\\
&=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-1\\
&=\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\\
&=\frac{1}{\alpha^3}(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)\\
&=0\quad\left(\because\ \sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0\right)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

(3)

(証明)

ド･モアブルの定理より　$\alpha^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ であり $|\alpha^2|=1$ なので

$|\alpha^2|^2=1$ より $\alpha^2\overline{\alpha^2}=1$　　$\therefore\ \overline{\alpha^2}=\dfrac{1}{\alpha^2}$

よって，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\alpha^2+\overline{\alpha^2}=(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)=2\cos 2\theta$

このとき，

$$
\begin{aligned}
f(\cos 2\theta)&=8\cos^3 2\theta+4\cos^2 2\theta-4\cos 2\theta-1\\
&=(2\cos 2\theta)^3+(2\cos 2\theta)^2-2(2\cos 2\theta)-1\\
&=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)^3+\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)^2-2\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)-1\\
&=\alpha^6+\alpha^4+\alpha^2+1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\alpha^6}\\
&=\frac{1}{\alpha^6}(\alpha^{12}+\alpha^{10}+\alpha^8+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^2+1)\\
&=\frac{1}{\alpha^6}(\alpha^7\cdot\alpha^5+\alpha^7\cdot\alpha^3+\alpha^7\cdot\alpha+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^2+1)\\
&=\frac{1}{\alpha^6}(\alpha^5+\alpha^3+\alpha+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^2+1)\quad(\because\alpha^7=1)\\
&=0\quad\left(\because\ \sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0\right)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)