平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評　点　欄

1

1

(1)

(i)　$t=0,\ 9,\ 10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじがちょうど1本となる確率は0である。

(ii)　$t\neq 0,\ 9,\ 10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじがちょうど1本となるのは

「当たり→はずれ→はずれ」または「はずれ→当たり→はずれ」または「はずれ→はずれ→当たり」

のときであるから，求める確率は

$$\frac{t}{10}\cdot\frac{10-t}{9}\cdot\frac{9-t}{8}+\frac{10-t}{10}\cdot\frac{t}{9}\cdot\frac{9-t}{8}+\frac{10-t}{10}\cdot\frac{9-t}{9}\cdot\frac{t}{8}=\frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$

であり，これは，$t=0,\ 9,\ 10$ のときも成り立つ。よって，求める確率は

$$\frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$ …答

である。

(2)

(i)　$t=8,\ 9,\ 10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじが0本となる確率は0である。

(ii)　$t\neq 8,\ 9,\ 10$ のとき

くじを3本続けて引くとき，当たりくじが0本となるのは3回ともはずれを引いたときなので

求める確率は

$$\frac{10-t}{10}\cdot\frac{9-t}{9}\cdot\frac{8-t}{8}$$

であり，これは，$t=8,\ 9,\ 10$ のときも成り立つ。よって，求める確率 $P(t)$ は

$$P(t)=\frac{t(10-t)(9-t)}{240}+\frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720}=\frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360}$$

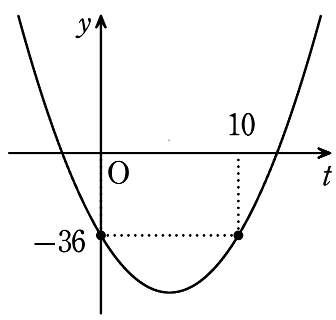
である。

$P(t)\leqq\frac{1}{2}$ より　$\frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360}\leqq\frac{1}{2}$

$\therefore\ (t-5)(t^2-10t-36)\leqq 0$　…①

ここで，$f(t)=t^2-10t-36$ とおくと

$f(t)=(t-5)^2-61$，$f(0)=f(10)=-36$



であるから，$y=f(t)$ のグラフより $0\leqq t\leqq 10$ において　$f(t)<0$

よって，不等式①より　$t-5\geqq 0$　　$\therefore\ t\geqq 5$

これと $0\leqq t\leqq 10$ から，求める整数 t の値は　5，6，7，8，9，10　…答

氏　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1). $V=\int_0^{\pi}\pi y^2\,dx$

$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\pi}\left(a\sin x+\frac{a}{a-1}\cos x\right)^2dx$

$=a^2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx+\frac{2a^2}{a-1}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$

ここで，

$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}dx=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi}=0$

$\int_0^{\pi}\cos^2 dx=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$

よって $\frac{V}{\pi}=a^2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2a^2}{a-1}\cdot 0+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}$

$=\frac{\pi}{2}\left\{a^2+\frac{a^2}{(a-1)^2}\right\}$

$V=\frac{\pi^2}{2}\left\{a^2+\frac{a^2}{(a-1)^2}\right\}$ //

(2). $f(a)=a^2+\frac{a^2}{(a-1)^2}\ (a>1)$ とおくと，

$V=\frac{\pi^2}{2}\cdot f(a).$

ここで，$f'(a)=2a+\frac{2a(a-1)^2-a^2\cdot 2(a-1)}{(a-1)^4}$

$=2a+\frac{-2a}{(a-1)^3}$

$=\frac{2a}{(a-1)^3}\cdot\{(a-1)^3-1\}$

$=\frac{2a}{(a-1)^3}\cdot(a-2)(a^2-a+1)$

$=\frac{2a}{(a-1)^3}\cdot(a-2)\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}.$

a	1	…	2	…
$f'(a)$	／	−	0	+
$f(a)$	／	↘	極小 8	↗

$a>1$ において，$f'(a)=0$ とすると，$a=2$.

$f(a)$ の増減表は，右上のようになり，$f(a)$ は，$a=2$ で最小値をとる。

$f(a)$ が最小のとき，V も最小となるので，

求める V の最小値は，$4\pi^2$ ($a=2$ のとき) //

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

3

評点欄

3

(1)

(証明)

ド・モアブルの定理より　$\alpha^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

また，$\alpha^7=1$ より $\alpha^7-1=0$　　$\therefore\ (\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\fallingdotseq 1$ なので　$\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0$　　(証明終わり)

(2)

(証明)

$|\alpha|=1$ なので $|\alpha|^2=1$ より　$\alpha\overline{\alpha}=1$　　$\therefore\ \overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

このとき，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=2\cos\theta$

これと(1)より

$$\begin{aligned}f(\cos\theta)&=8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1=(2\cos\theta)^3+(2\cos\theta)^2-2(2\cos\theta)-1\\&=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-1\\&=\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\\&=\frac{1}{\alpha^3}(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)\\&=0\quad\left(\because\ \sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0\right)\end{aligned}$$

(証明終わり)

(3)

(証明)

ド・モアブルの定理より　$\alpha^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ であり $\alpha^2=\beta$ とおくと

(1)と同様に，$\beta^7=\cos 14\theta+i\sin 14\theta=\cos 4\pi+i\sin 4\pi=1$ より $\beta^7-1=0$

$\therefore\ (\beta-1)(\beta^6+\beta^5+\beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1)=0$　　$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=0}^{6}\beta^k=0\ (\because\ \beta\fallingdotseq 1)$

また，$|\beta|=1$ なので $|\beta|^2=1$ より　$\beta\overline{\beta}=1$　　$\therefore\ \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$

このとき，$\beta+\dfrac{1}{\beta}=\beta+\overline{\beta}=(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)=2\cos 2\theta$

よって，(2)と同様に，$f(\cos 2\theta)=\dfrac{1}{\beta^3}(\beta^6+\beta^5+\beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1)=0$　$\left(\because\ \displaystyle\sum_{k=1}^{6}\beta^k=0\right)$

また，同様に，$\alpha^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ であり $\alpha^3=\gamma$ とおくと

$\gamma^7=\cos 21\theta+i\sin 21\theta=\cos 6\pi+i\sin 6\pi=1$ より　$\gamma^7-1=0$

$\therefore\ (\gamma-1)(\gamma^6+\gamma^5+\gamma^4+\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1)=0$　　$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=0}^{6}\gamma^k=0\ (\because\ \gamma\fallingdotseq 1)$

また，$|\gamma|=1$ なので $|\gamma|^2=1$ より　$\gamma\overline{\gamma}=1$　　$\therefore\ \overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}$

このとき，$\gamma+\dfrac{1}{\gamma}=\gamma+\overline{\gamma}=(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)+(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)=2\cos 3\theta$

よって，$f(\cos 3\theta)=\dfrac{1}{\gamma^3}(\gamma^6+\gamma^5+\gamma^4+\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1)=0$　$\left(\because\ \displaystyle\sum_{k=1}^{6}\gamma^k=0\right)$　　(証明終わり)

平成31年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数 学 解 答 紙 〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1). 対偶：x, y の少なくとも一方が3の倍数でないならば、x^2+y^2 が3の倍数でないを示す。

以下 mod 3 とおく。自然数 l が

$l\equiv 0$ のとき $l^2\equiv 0$、$l\equiv 1$ のとき $l^2\equiv 1$

$l\equiv 2$ のとき $l^2\equiv 4\equiv 1$ である。

よって、ア) x, y がともに3の倍数でないとき $x^2+y^2\equiv 2$

イ). x, y の一方のみが3の倍数でないとき、$x^2+y^2\equiv 1$

このとき x^2+y^2 は3の倍数でないので

対偶は真。

以上より、命題も真であり示せた。//

(2). i). $n=0$ のとき

$x^2+y^2=5$ なので、これをみたす自然数 x, y は

$(x^2, y^2)=(1, 4), (4, 1)$ より

$(x, y)=(1, 2), (2, 1)$.

ii) $n\geqq 1$ のとき、

(1)より x, y は3の倍数なので、

$x=3x_1, y=3y_1$ (x_1, y_1 は自然数) とおけるので、$x^2+y^2=5\cdot 3^{2n}$ に代入すると、

$$(3x_1)^2+(3y_1)^2=5\cdot 3^{2n}$$

$$x_1^2+y_1^2=5\cdot 3^{2(n-1)} \quad \cdots ①$$

ア) $n=1$ のとき、$x_1^2+y_1^2=5$ より

これをみたす自然数 x_1, y_1 は

$(x_1^2, y_1^2)=(1, 4), (4, 1)$

$(x_1, y_1)=(1, 2), (2, 1)$

$(x, y)=(3, 2\cdot 3), (2\cdot 3, 3)$

イ) $n\geqq 2$ のとき、①の(左辺)は3の倍数より

(1)より x_1, y_1 は3の倍数なので、

$x_2=3x_1$, $y_2=3y_1$ とおける。

このとき、$x_2^2+y_2^2=5\cdot 3^{2(n-2)}$ …②

$n=2$ のとき、$x_2^2+y_2^2=5$ より

$(x, y)=(3^2, 2\cdot 3^2), (2\cdot 3^2, 3^2)$

$n\geqq 2$ のとき、②の(左辺)は3の倍数より

$x_3=3x_2$, $y_3=3y_2$ とおける。

これをくり返すことにより

$x_n^2+y_n^2=5$ となり

$x^2+y^2=5$ をみたす自然数の組 (x, y) は

$(x, y)=(3^n, 2\cdot 3^n), (2\cdot 3^n, 3^n)$ のみであることが示された。//

(3). i) $m=2n$ のとき、(n は0以上の整数)

$x^2+y^2=7\cdot 3^{2n}$ より (2)と同様に考えると、

$x_n^2+y_n^2=7$ となり、これをみたす

自然数 x_n, y_n は存在しない。

ii) $m=2n+1$ のとき、(n は0以上の整数)

$x^2+y^2=7\cdot 3^{2n+1}=21\cdot 3^{2n}$ より

$x_n^2+y_n^2=21$ となり、これをみたす

自然数 x_n, y_n は存在しない。

以上より、

$x^2+y^2=7\cdot 3^m$ をみたす自然数 x, y は

存在しないことが示された。//