令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\vec{b}-t\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{LN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}\vec{c}-t\vec{a}$$

(2)　四面体 OABC は 1 辺の長さが 1 の正四面体なので

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1，\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\quad\cdots①$$

また，LM⊥LN より　$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=0$

$$(s\vec{b}-t\vec{a})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}-t\vec{a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad t^2|\vec{a}|^2-st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{s}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{t}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 4t^2-2st+s-t=0\qquad(\because\ ①\text{ より})$$

$$\therefore\quad (1-2t)\,s=t-4t^2\quad\cdots②$$

ここで，$u=1-2t$ とおくと　$0<t<\frac{1}{4}$ だから　$u>0$

このとき，

$$t=\frac{1-u}{2}，\quad 4t^2=u^2-2u+1$$

これらを ② に代入して

$$u\cdot s=-u^2+\frac{3}{2}u-\frac{1}{2}$$

$u>0$ であるから　$s=-u-\frac{1}{2u}+\frac{3}{2}$

(3)　(2) より　$s=-\left(u+\frac{1}{2u}\right)+\frac{3}{2}$

$u>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係から

$$u+\frac{1}{2u}\geqq2\sqrt{u\cdot\frac{1}{2u}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad s=\frac{3}{2}-\left(u+\frac{1}{2u}\right)\leqq\frac{3}{2}-\sqrt{2}\qquad\therefore\quad s\leqq\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

等号成立は

$$u=\frac{1}{2u}\qquad\therefore\quad u=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$u=\frac{\sqrt{2}}{2}$ すなわち　$t=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ のとき最大値 $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ をとる。

令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その二〕

受験番号

2

評点欄

2

(1). $x=\frac{17}{2}$ を解にもつとき.

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2+\left(c-\frac{27}{2}\right)\cdot\left(\frac{17}{2}\right)+c^2+60=0$$

$$2c^2+17c+35=0$$

$$(2c+7)(c+5)=0$$

$$c=-\frac{7}{2},\ -5 \quad //$$

(2) 自然数解を $x=\alpha$ とおくと.

$$\alpha^2+\left(c-\frac{27}{2}\right)\alpha+c^2+60=0$$

が成り立つ. c について整理すると

$$c^2+\alpha c+\alpha^2-\frac{27}{2}\alpha+60=0 \cdots ①$$

①の判別式を D とおくと. c は実数なので.

$D\geqq 0$ をみたす.

$$D=\alpha^2-4\cdot1\cdot\left(\alpha^2-\frac{27}{2}\alpha+60\right)$$

$$=-3\alpha^2+54\alpha-240\geqq 0$$

$$\alpha^2-18\alpha+80\leqq 0$$

$$(\alpha-8)(\alpha-10)\leqq 0$$

$$8\leqq\alpha\leqq 10$$

α は自然数より $\alpha=8, 9, 10$.

i) $\alpha=8$ のとき ①に代入して

$$c^2+8c+16=0$$

$$(c+4)^2=0$$

$$c=-4.$$

ii) $\alpha=9$ のとき ①に代入して.

$$c^2+9c+\frac{39}{2}=0$$

$$c=\frac{-9\pm\sqrt{3}}{2}$$

iii) $\alpha=10$ のとき ①に代入して.

$$c^2+10c+25=0$$

$$(c+5)^2=0$$

$$c=-5$$

以上より. 求める c の値は.

$$c=-4,\ -5,\ \frac{-9\pm\sqrt{3}}{2} \quad //$$

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \int_1^e (\log x)(\log x)' dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^e$

$\displaystyle = \frac{1}{2}$

（別解）$\displaystyle I = \int_1^e \frac{\log x}{x}dx$ とおくと，

$\displaystyle I = \left[(\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\log x\, dx$

$= 1 - I$

よって，$\displaystyle I = \frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle f(x) = 3\log x - x\int_1^e \frac{2f(t)+1}{2t}dt$ …①.

$\displaystyle\int_1^e \frac{2f(t)+1}{2t}dt = k$（$k$は定数）…② とおくと，

①より，$f(x) = 3\log x - kx$ …③．これを②に代入して，

$\displaystyle\int_1^e \frac{2f(t)+1}{2t}dt = 3\int_1^e \frac{\log t}{t}dt + \int_1^e \left(-k + \frac{1}{2t}\right)dt$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{1}{2} + \left[-kt + \frac{1}{2}\log|t|\right]_1^e$　（∵(1)より）

$\displaystyle = \frac{3}{2} - k(e-1) + \frac{1}{2}(1-0)$

$= -ke + k + 2 = k$ より，　$\displaystyle k = \frac{2}{e}$

よって，$\displaystyle f(x) = 3\log x - \frac{2}{e}x$

(3) (2)より，$\displaystyle f(x) = 3\log x - \frac{2}{e}x$

$\displaystyle f'(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{e} = \frac{3e-2x}{ex}$

$f'(x) = 0$とすると，$x = \frac{3}{2}e$．

$x>0$における$f(x)$の増減表は，次のようになる。

x	0	…	$\frac{3}{2}e$	…
$f'(x)$	/	+	0	−
$f(x)$	/	↗	$3\log\frac{3}{2}$	↘

よって，

$f(x)$は，$0<x\leqq\frac{3}{2}e$ で増加し，

$x\geqq\frac{3}{2}e$ で減少する。

極大値：$3\log\frac{3}{2}$（$x=\frac{3}{2}e$のとき）

極小値：なし

氏　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

4

評点欄

4

(1) すべての自然数 n について $a_n>1$ ……① が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

条件より，$a_1=2$ であるから，① が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，① が成り立つ，すなわち $a_k>1$ が成り立つと仮定すると，

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}-1=\left(\frac{3}{4}a_k+\frac{1}{4a_k}\right)-1=\frac{3{a_k}^2-4a_k+1}{4a_k}=\frac{(3a_k-1)(a_k-1)}{4a_k}>0$$

よって　$a_{k+1}>1$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1], [2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2)

$$\frac{3}{4}(a_n-1)-(a_{n+1}-1)=\frac{3}{4}(a_n-1)-\left\{\left(\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4a_n}\right)-1\right\}$$

$$=\frac{a_n-1}{4a_n}>0$$

すなわち　$a_{n+1}-1<\dfrac{3}{4}(a_n-1)$

(3) (1), (2) から　$0<a_{n+1}-1<\dfrac{3}{4}(a_n-1)$

$$0<a_n-1<\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(a_1-1)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$