令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

1

評 点 欄

1

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\vec{b}-t\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{LN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}\vec{c}-t\vec{a}$$

(2)　四面体 OABC は１辺の長さが１の正四面体なので

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\quad\cdots①$$

また，LM⊥LN より　$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=0$

$$(s\vec{b}-t\vec{a})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}-t\vec{a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad t^2|\vec{a}|^2-st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{s}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{t}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 4t^2-2st+s-t=0\qquad(\because\ ①\ より)$$

$$\therefore\quad (1-2t)s=t-4t^2\quad\cdots②$$

ここで，$u=1-2t$ とおくと　$0<t<\frac{1}{4}$ だから　$u>0$

このとき，

$$t=\frac{1-u}{2},\quad 4t^2=u^2-2u+1$$

これらを ② に代入して

$$u\cdot s=-u^2+\frac{3}{2}u-\frac{1}{2}$$

$u>0$ であるから　$s=-u-\frac{1}{2u}+\frac{3}{2}$

(3)　(2) より　$s=-\left(u+\frac{1}{2u}\right)+\frac{3}{2}$

$u>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係から

$$u+\frac{1}{2u}\geqq2\sqrt{u\cdot\frac{1}{2u}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad s=\frac{3}{2}-\left(u+\frac{1}{2u}\right)\leqq\frac{3}{2}-\sqrt{2}\qquad\therefore\quad s\leqq\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

等号成立は

$$u=\frac{1}{2u}\qquad\therefore\quad u=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$u=\frac{\sqrt{2}}{2}$ すなわち　$t=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ のとき最大値 $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ をとる。

氏　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

2

評点欄

2

(1), $x=\frac{17}{2}$ を解にもつとき.

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2+\left(c-\frac{27}{2}\right)\cdot\left(\frac{17}{2}\right)+c^2+60=0$$

$$2c^2+17c+35=0$$

$$(2c+7)(c+5)=0$$

$$c=-\frac{7}{2},\ -5$$ //

(2) 自然数解を $x=\alpha$ とおくと.

$$\alpha^2+\left(c-\frac{27}{2}\right)\alpha+c^2+60=0$$

が成り立つ. cについて整理すると

$$c^2+\alpha c+\alpha^2-\frac{27}{2}\alpha+60=0\ \cdots①$$

①の判別式をDとおくと. cは実数なので.

$D\geqq 0$ をみたす.

$$D=\alpha^2-4\cdot 1\cdot\left(\alpha^2-\frac{27}{2}\alpha+60\right)$$

$$=-3\alpha^2+54\alpha-240\geqq 0$$

$$\alpha^2-18\alpha+80\leqq 0$$

$$(\alpha-8)(\alpha-10)\leqq 0$$

$$8\leqq\alpha\leqq 10$$

αは自然数より $\alpha=8,9,10$.

i) $\alpha=8$ のとき ①に代入して

$$c^2+8c+16=0$$

$$(c+4)^2=0$$

$$c=-4$$

ii) $\alpha=9$ のとき ①に代入して.

$$c^2+9c+\frac{39}{2}=0$$

$$c=\frac{-9\pm\sqrt{3}}{2}$$

iii) $\alpha=10$ のとき ①に代入して.

$$c^2+10c+25=0$$

$$(c+5)^2=0$$

$$c=-5$$

以上より. 求めるcの値は.

$$c=-4,\ -5,\ \frac{-9\pm\sqrt{3}}{2}$$ //

氏　　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

3

評点欄

3

11枚のカードの中から2枚を取り出す場合の総数は　$_{11}C_2 = 55$ (通り)

(1)　2枚のカードの番号の積が18以下となるのは

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11),
(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 4), (3, 5), (3, 6)

の20通りなので，

$$P(B) = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$$

(2)　2枚のカードの番号の和が奇数かつ積が18以下となるのは

(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (2, 9), (3, 4), (3, 6)

の11通りなので，

$$P(A \cap B) = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$$

(3)　$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{55}$

(4)　$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ なので

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

$f(x)=3\int_1^x g(t)dt+g(x)$　…①

$g(x)=x^2+\int_0^1 f'(t)dt$　…②

$a=\int_0^1 f'(t)dt$　…③

(1)　②，③より　$g(x)=x^2+a$ なので $g'(x)=2x$

よって，①より $f'(x)=3\cdot g(x)+g'(x)$

$=3(x^2+a)+2x$

$=3x^2+2x+3a$

(2)　(1)を用いて③より

$a=\int_0^1(3t^2+2t+3a)dt$

$=\left[t^3+t^2+3at\right]_0^1$

$=2+3a$

$\therefore\quad a=-1$

(3)　(2)を用いると，$g(x)=x^2-1$

①に代入すると，$f(x)=3\int_1^x(t^2-1)dt+x^2-1$

$=3\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^x+x^2-1$

$=x^3+x^2-3x+1$