令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

病原体に感染しているという事象を X，陽性と判定されるという事象を Y とすると

$$P(Y)=\frac{4}{100},\ P(\overline{Y})=\frac{96}{100},\ P_X(Y)=\frac{97}{100},$$

$$P_X(\overline{Y})=\frac{3}{100},\ P_{\overline{X}}(Y)=\frac{1}{100},\ P_{\overline{X}}(\overline{Y})=\frac{99}{100}$$

(1)　求める確率は $P_X(Y)$ であるから，　$P_X(Y)=\dfrac{97}{100}$

(2)　求める確率は $P(X)$ でこれを p　$(0<p<1)$ とおくと

$$P(Y)=P(X\cap Y)+P(\overline{X}\cap Y)=P(X)P_X(Y)+P(\overline{X})P_{\overline{X}}(Y)\text{ より}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{4}{100}=p\cdot\frac{97}{100}+(1-p)\cdot\frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow\ 4=97p+(1-p)$$

$$\Leftrightarrow\ p=\frac{1}{32}$$

(3)　陽性反応を示した個体が，実際は病原菌に感染していない条件付き確率は

$$P_Y(\overline{X})=\frac{P(Y\cap\overline{X})}{P(Y)}=\frac{\frac{1}{100}\cdot(1-p)}{\frac{4}{100}}=\frac{1-p}{4}=\frac{31}{128}$$

令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1).

$\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^3+p\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)-q$

$=(\alpha-\beta)-3\sqrt[3]{\alpha\beta}\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)+p\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)-q$

$=q-3\cdot\frac{p}{3}\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)+p\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)-q$

$=0$ より. $x=\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ は.

$x^3+px-q=0$ の解であることが示せた。//

(2).

(1)において. $p=6,\ q=2$ のとき.

$$\begin{cases}\alpha-\beta=2 & \cdots① \\ \alpha\beta=\left(\frac{6}{3}\right)^3=8 & \cdots②\end{cases}$$ なので…

①より $\alpha=\beta+2$ を②に代入すると.

$\beta(\beta+2)=8$

$\beta^2+2\beta-8=0$

$(\beta+4)(\beta-2)=0$.

$\beta>0$ より $\beta=2$, ①より $\alpha=4$.

(1)より $x=\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ は $x^3+px-q=0$ の解である.

よって. 求める解は. $x=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ //

(3).

$\alpha=1+\sqrt{\frac{28}{27}},\ \beta=-1+\sqrt{\frac{28}{27}}$ とおくと.

$\alpha,\ \beta$ は正の実数であり

$$\begin{cases}\alpha-\beta=2, \\ \alpha\beta=\left(1+\sqrt{\frac{28}{27}}\right)\left(-1+\sqrt{\frac{28}{27}}\right)=\frac{1}{27} \\ \quad=\left(\frac{1}{3}\right)^3.\end{cases}$$

よって. (1)より $p=1,\ q=2$ のとき.

$x=\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}-\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{28}{27}}}$ は

3次方程式 $x^3+x-2=0$ の実数解である.

このとき. 方程式は. $(x-1)(x^2+x+2)=0$ より

$x^2+x+2=0$ は実数解をもたないので.

ただ1つの実数解をもち. その実数解は.

$x=1$ である.

よって.

$\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}-\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{28}{27}}}=1$ //

令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

③

3

(1)

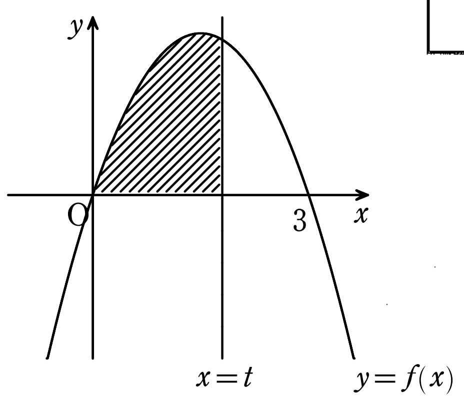
$$V_1(t)=\pi\int_0^t\{f(x)\}^2dx$$

$$=\pi\int_0^t x^2(3-x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^t(9x^2-6x^3+x^4)dx$$

$$=\pi\left[3x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right]_0^t$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{3}{2}t^4+3t^3\right)$$



(2)

$$V_2(t)=\pi\int_t^2\{g(x)\}^2dx$$

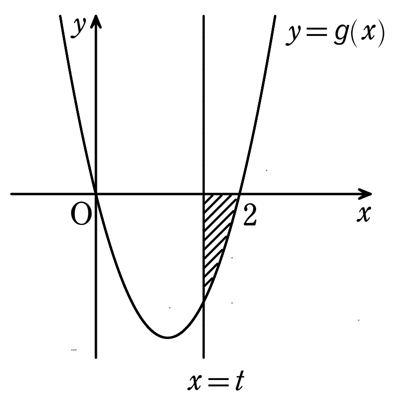
$$=\pi\int_t^2 4x^2(x-2)^2dx$$

$$=4\pi\int_t^2(x^4-4x^3+4x^2)dx$$

$$=4\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_t^2$$

$$=4\pi\left\{\left(\frac{32}{5}-16+\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}t^5-t^4+\frac{4}{3}t^3\right)\right\}$$

$$=4\pi\left(-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{4}{3}t^3+\frac{16}{15}\right)$$



(3)　(1)，(2) より

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)$$

$$=\pi\left(-\frac{3}{5}t^5+\frac{5}{2}t^4-\frac{7}{3}t^3+\frac{64}{15}\right)$$

よって

$$V'(t)=\pi(-3t^4+10t^3-7t^2)$$

$$=-\pi t^2(3t-7)(t-1)$$

$V'(t)=0$ を解くと，　$t=1,\ \frac{7}{3}$

$0<t<2$ において増減表をかくと以下の通り。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		$\searrow$	$\frac{23}{6}\pi$	$\nearrow$	

よって $V(t)$ は $t=1$ のとき極小値 $\frac{23}{6}\pi$ をとる。

令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

(1). $a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[-x\cdot\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$

$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{2}{\pi}.$

よって，$a_1=\frac{2}{\pi}$，$b_1=1-\frac{2}{\pi}$ //

(2). $n\geqq 2$のとき，

$a_n=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cdot\sin x\,dx$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\left[-x^n\cdot\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-n\cdot x^{n-1}\cdot\cos x)dx$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n-1}\cdot\cos x\,dx$

$=\frac{2n}{\pi}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n-1}\cdot\cos x\,dx=\frac{2n}{\pi}\cdot b_{n-1}$

$b_n=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cdot\cos x\,dx$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\left[x^n\cdot\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}n\cdot x^{n-1}\cdot\sin x\,dx$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n-1}\cdot\sin x\,dx$

$=1-\frac{2n}{\pi}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n-1}\cdot\sin x\,dx=1-\frac{2n}{\pi}\cdot a_{n-1}$

よって，$a_n=\frac{2n}{\pi}b_{n-1}$ … ①，$b_n=1-\frac{2n}{\pi}a_{n-1}$ … ② //

(3). $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$において，$x^n\geqq 0$，$0\leqq\sin x\leqq 1$より．

$0\leqq x^n\sin x\leqq x^n$

$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cdot\sin x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\,dx$

ここで，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$なので．

$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cdot\sin x\,dx\leqq\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$

$0\leqq\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cdot\sin x\,dx\leqq\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$

$\therefore 0\leqq a_n\leqq\frac{\pi}{2(n+1)}$

また，

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$において，$x^n\geqq 0$，$0\leqq\cos x\leqq 1$なので

同様にして．$0\leqq b_n\leqq\frac{\pi}{2(n+1)}$.

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(n+1)}=0$ だから

はさみうちの原理より．$\lim_{n\to\infty}b_n=0$ … ③.

②より．$n\geqq 1$のとき．$b_{n+1}=1-\frac{2(n+1)}{\pi}\cdot a_n$

$a_n=\frac{\pi}{2(n+1)}(1-b_{n+1})$.

③より．$\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ だから．

$\lim_{n\to\infty}n\cdot a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{2(n+1)}(1-b_{n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})}(1-b_{n+1})=\frac{\pi}{2}$ … ④

①より．$n\geqq 1$のとき．$a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{\pi}\cdot b_n$

$b_n=\frac{\pi}{2(n+1)}a_{n+1}$

④より．$\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}n\cdot a_n=\frac{\pi}{2}$ だから．

$\lim_{n\to\infty}n^2 b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2}{2(n+1)}a_{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2}{2(n+1)^2}\cdot(n+1)a_{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})^2}\cdot(n+1)\cdot a_{n+1}$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$

よって，$\lim_{n\to\infty}n\cdot a_n=\frac{\pi}{2}$，$\lim_{n\to\infty}n^2 b_n=\frac{\pi^2}{4}$ //