令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

病原体に感染しているという事象をX，陽性と判定されるという事象をYとすると

$$P(Y)=\frac{4}{100},\ P(\overline{Y})=\frac{96}{100},\ P_X(Y)=\frac{97}{100},$$

$$P_X(\overline{Y})=\frac{3}{100},\ P_{\overline{X}}(Y)=\frac{1}{100},\ P_{\overline{X}}(\overline{Y})=\frac{99}{100}$$

(1)　求める確率は$P_X(Y)$であるから，　$P_X(Y)=\frac{97}{100}$

(2)　求める確率は$P(X)$でこれをp　$(0<p<1)$とおくと

$$P(Y)=P(X\cap Y)+P(\overline{X}\cap Y)=P(X)P_X(Y)+P(\overline{X})P_{\overline{X}}(Y)\text{ より}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{4}{100}=p\cdot\frac{97}{100}+(1-p)\cdot\frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow\quad 4=97p+(1-p)$$

$$\Leftrightarrow\quad p=\frac{1}{32}$$

(3)　陽性反応を示した個体が，実際は病原菌に感染していない条件付き確率は

$$P_Y(\overline{X})=\frac{P(Y\cap\overline{X})}{P(Y)}=\frac{\frac{1}{100}\cdot(1-p)}{\frac{4}{100}}=\frac{1-p}{4}=\frac{31}{128}$$

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1) 点Cは辺ABを2：1に内分するので

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)-\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

(2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\cos\theta$ なので

$$|\overrightarrow{OC}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2|\vec{a}+2\vec{b}|^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 8(1+\cos\theta)$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2=\left|-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2|\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2(5-4\cos\theta)$$

$-1<\cos\theta<1$ なので，$1+\cos\theta>0$，$5-4\cos\theta>0$ であるから

$$|\overrightarrow{OC}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+\cos\theta}\text{，}|\overrightarrow{AC}|=\frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta}$$

したがって，

$$f(\theta)=\frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta}+\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta}+\frac{4}{3}\sqrt{1+\cos\theta}$$

(3) (2)の結果より

$$\{f(\theta)\}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2(\sqrt{5-4\cos\theta}+2\sqrt{1+\cos\theta})^2$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\{(5-4\cos\theta)+4\sqrt{(5-4\cos\theta)(1+\cos\theta)}+4(1+\cos\theta)\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2(9+4\sqrt{-4\cos^2\theta+\cos\theta+5})$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(9+4\sqrt{-4\left(\cos\theta-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{81}{16}}\right)$$

よって，$\cos\theta=\frac{1}{8}$ のとき $\{f(\theta)\}^2$ は最大値 $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(9+4\cdot\frac{9}{4}\right)=8$ をとる。

ところで，$f(\theta)=|\overrightarrow{AC}|+\sqrt{2}|\overrightarrow{OC}|$ なので $f(\theta)>0$ である。

したがって，$\cos\theta=\frac{1}{8}$ のとき $f(\theta)$ は最大値 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ をとる。

令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その三〕

受験番号

3

評点欄

3

(1)　円 C と直線 ℓ の交点の x 座標を求める。C と ℓ の方程式から y を消去すると

$x^2+\{(-2x+7)-2\}^2=25$ より　　$5x(x-4)=0$　　　$\therefore\ x=0,\ 4$

$x_1<x_2$ より $x_1=0$，$x_2=4$

$y=-2x+7$ にそれぞれ代入して　$y_1=7$，$y_2=-1$

よって，　A$(0,\ 7)$，B$(4,\ -1)$

(2)　$y=ax^2+bx+c$ …① とする。

放物線①が点A $(0,\ 7)$ を通るとき　　$7=c$ …②

放物線①が点B $(4,\ -1)$ を通るとき　　$-1=16a+4b+c$…③

放物線①が点C $(3,\ -2)$ を通るとき　　$-2=9a+3b+c$ …④

②，③，④より　　$a=1$，$b=-6$，$c=7$

(3)　(2)の結果より，放物線①の方程式は　$y=x^2-6x+7$

$y'=2x-6$ より，点A$(0,\ 7)$ における接線の方程式は

$y-7=-6(x-0)$　　　$\therefore$　$y=-6x+7$

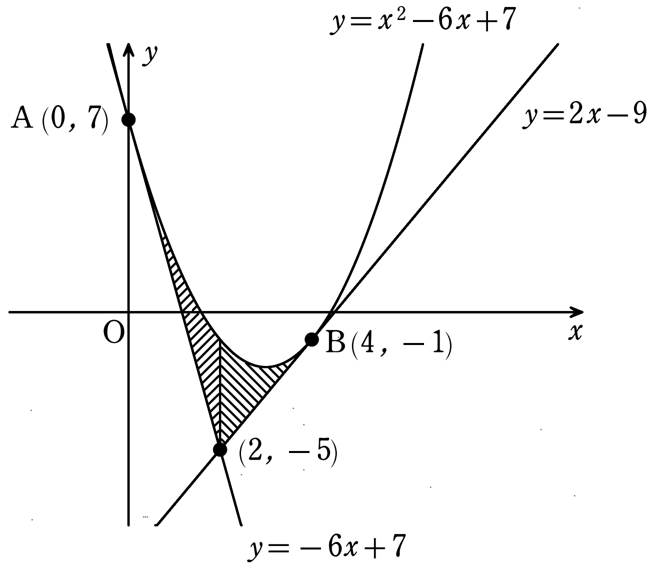
同様に，点B$(4,\ -1)$ における接線の方程式は

$y-(-1)=2(x-4)$　　　$\therefore$　$y=2x-9$

この２つの接線の交点の x 座標を求めると

$-6x+7=2x-9$　　　$\therefore$　$x=2$

よって，右のグラフより求める図形の面積は



$$\int_0^2\{(x^2-6x+7)-(-6x+7)\}dx$$

$$+\int_2^4\{(x^2-6x+7)-(2x-9)\}dx$$

$$=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その四〕

受験番号

評 点 欄

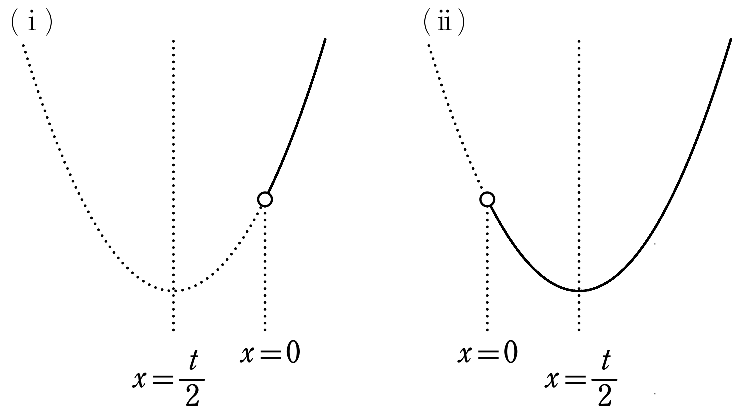
4

4

(1)　$x+\dfrac{1}{x}=t$ より　　$x^2-tx+1=0$

ここで，$f(x)=x^2-tx+1$ とおくと $f(x)$ は下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=\dfrac{t}{2}$ である。

$f(x)=0$ が $x>0$ の範囲に実数解をもつ条件を考える。



(i)　$\dfrac{t}{2}<0$ つまり $t<0$ のとき

$f(0)=1>0$ であるから　解なし

(ii)　$\dfrac{t}{2}\geqq 0$ つまり $t\geqq 0$ のとき

$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(-t)^2-4\cdot 1\cdot 1=t^2-4$

(ア)　$D>0$ のとき

$t^2-4>0$　これと $t\geqq 0$ であるから $t>2$

このとき，正の実数解を２個もつ。

(イ)　$D=0$ のとき

$t^2-4=0$　これと $t\geqq 0$ であるから $t=2$

このとき，正の実数解を１個もつ。

(ウ)　$D<0$ のとき

$t^2-4<0$　これと $t>0$ であるから $0\leqq t<2$

このとき，正の実数解をもたない。

以上から，$\begin{cases} t<2 \text{ のとき　正の実数解をもたない} \\ t=2 \text{ のとき　正の実数解を１個もつ} \\ t>2 \text{ のとき　正の実数解を２個もつ} \end{cases}$

(2)　$x+\dfrac{1}{x}=t$ より　　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$

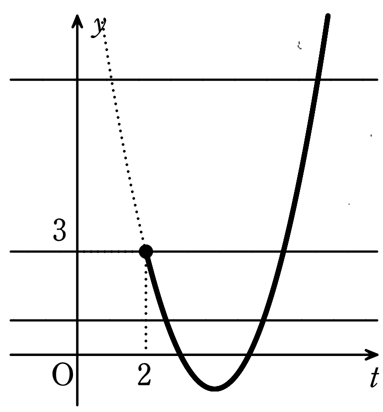
よって，与式は　$(t^2-2)-8t+17=k$　　　$\therefore$　$t^2-8t+15=k$

ここで，$g(t)=t^2-8t+15$ とおくと　　$g(t)=(t-4)^2-1$

また，(1) の結果より実数 t が１つ定まると正の実数 x は

$\begin{cases} t<2 \text{ のとき　0 個} \\ t=2 \text{ のとき　1 個} \\ t>2 \text{ のとき　2 個} \end{cases}$

決まる。



これと右のグラフより，$y=g(t)$ と $y=k$ の共有点の個数から

$\begin{cases} 0<k<3 \text{ のとき 正の実数解は４個} \\ k=3 \text{ のとき 正の実数解は３個} \\ 3<k \text{ のとき 正の実数解は２個} \end{cases}$