令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

病原体に感染しているという事象を X, 陽性と判定されるという事象を Y とすると

$$P(Y)=\frac{4}{100},\ P(\overline{Y})=\frac{96}{100},\ P_X(Y)=\frac{97}{100},$$

$$P_X(\overline{Y})=\frac{3}{100},\ P_{\overline{X}}(Y)=\frac{1}{100},\ P_{\overline{X}}(\overline{Y})=\frac{99}{100}$$

(1) 求める確率は $P_X(Y)$ であるから,　　$P_X(Y)=\dfrac{97}{100}$

(2) 求める確率は $P(X)$ でこれを p $(0<p<1)$ とおくと

$$P(Y)=P(X\cap Y)+P(\overline{X}\cap Y)=P(X)P_X(Y)+P(\overline{X})P_{\overline{X}}(Y) \text{ より}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{4}{100}=p\cdot\frac{97}{100}+(1-p)\cdot\frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow\quad 4=97p+(1-p)$$

$$\Leftrightarrow\quad p=\frac{1}{32}$$

(3) 陽性反応を示した個体が，実際は病原菌に感染していない条件付き確率は

$$P_Y(\overline{X})=\frac{P(Y\cap\overline{X})}{P(Y)}=\frac{\frac{1}{100}\cdot(1-p)}{\frac{4}{100}}=\frac{1-p}{4}=\frac{31}{128}$$

令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1) 点Cは辺ABを$2:1$に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)-\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

(2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\cos\theta$ なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2|\vec{a}+2\vec{b}|^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 8(1+\cos\theta)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\left|-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2|\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2(5-4\cos\theta)$$

$-1<\cos\theta<1$ なので，$1+\cos\theta>0$，$5-4\cos\theta>0$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+\cos\theta},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta}$$

したがって，

$$f(\theta)=\frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta}+\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta}+\frac{4}{3}\sqrt{1+\cos\theta}$$

(3) (2)の結果より

$$\{f(\theta)\}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2(\sqrt{5-4\cos\theta}+2\sqrt{1+\cos\theta})^2$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\{(5-4\cos\theta)+4\sqrt{(5-4\cos\theta)(1+\cos\theta)}+4(1+\cos\theta)\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2(9+4\sqrt{-4\cos^2\theta+\cos\theta+5})$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(9+4\sqrt{-4\left(\cos\theta-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{81}{16}}\right)$$

よって，$\cos\theta=\frac{1}{8}$ のとき$\{f(\theta)\}^2$は最大値$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(9+4\cdot\frac{9}{4}\right)=8$ をとる。

ところで，$f(\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|+\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ なので $f(\theta)>0$ である。

したがって，$\cos\theta=\frac{1}{8}$ のとき $f(\theta)$ は最大値 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ をとる。

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その三〕

受験番号

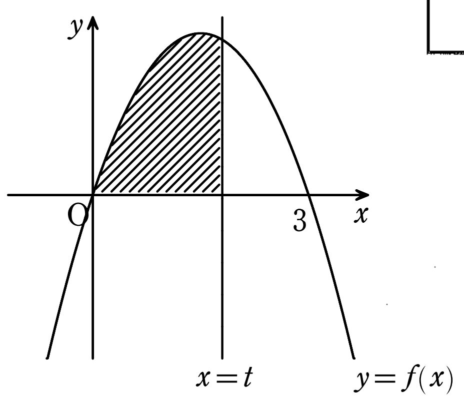
評点欄

3

3

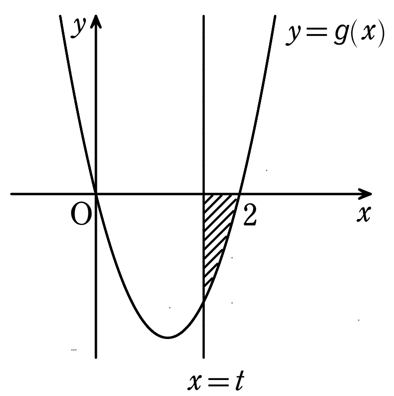
(1)

$$V_1(t)=\pi\int_0^t\{f(x)\}^2dx$$
$$=\pi\int_0^t x^2(3-x)^2dx$$
$$=\pi\int_0^t(9x^2-6x^3+x^4)dx$$
$$=\pi\left[3x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right]_0^t$$
$$=\pi\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{3}{2}t^4+3t^3\right)$$



(2)

$$V_2(t)=\pi\int_t^2\{g(x)\}^2dx$$
$$=\pi\int_t^2 4x^2(x-2)^2dx$$
$$=4\pi\int_t^2(x^4-4x^3+4x^2)dx$$
$$=4\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_t^2$$
$$=4\pi\left\{\left(\frac{32}{5}-16+\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}t^5-t^4+\frac{4}{3}t^3\right)\right\}$$
$$=4\pi\left(-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{4}{3}t^3+\frac{16}{15}\right)$$



(3) (1)，(2) より

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)$$
$$=\pi\left(-\frac{3}{5}t^5+\frac{5}{2}t^4-\frac{7}{3}t^3+\frac{64}{15}\right)$$

よって

$$V'(t)=\pi(-3t^4+10t^3-7t^2)$$
$$=-\pi t^2(3t-7)(t-1)$$

$V'(t)=0$ を解くと，$t=1,\ \dfrac{7}{3}$

$0<t<2$ において増減表をかくと以下の通り。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		$\searrow$	$\frac{23}{6}\pi$	$\nearrow$	

よって $V(t)$ は $t=1$ のとき極小値 $\dfrac{23}{6}\pi$ をとる。

令和２年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

4

評点欄

4

(1). $a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[-x\cdot\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$

$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{2}{\pi}.$

よって, $a_1=\frac{2}{\pi}$, $b_1=1-\frac{2}{\pi}$ //

(2). $n\geqq 2$のとき,

$a_n=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cdot\sin x\,dx$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\left[-x^n\cdot\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-n\cdot x^{n-1}\cdot\cos x)\,dx$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cdot\cos x\,dx$

$=\frac{2n}{\pi}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cdot\cos x\,dx=\frac{2n}{\pi}\cdot b_{n-1}$

$b_n=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cdot\cos x\,dx$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\left[x^n\cdot\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cdot x^{n-1}\cdot\sin x\,dx$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cdot\sin x\,dx$

$=1-\frac{2n}{\pi}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cdot\sin x\,dx=1-\frac{2n}{\pi}\cdot a_{n-1}$

よって, $a_n=\frac{2n}{\pi}b_{n-1}$ … ①, $b_n=1-\frac{2n}{\pi}a_{n-1}$ … ② //

(3). $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$において, $x^n\geqq 0$, $0\leqq\sin x\leqq 1$より.

$0\leqq x^n\sin x\leqq x^n$

$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cdot\sin x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\,dx$

ここで, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$ なので.

$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cdot\sin x\,dx\leqq\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$

$0\leqq\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cdot\sin x\,dx\leqq\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$

$\therefore 0\leqq a_n\leqq\frac{\pi}{2(n+1)}$

また,

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$において, $x^n\geqq 0$, $0\leqq\cos x\leqq 1$ なので

同様にして. $0\leqq b_n\leqq\frac{\pi}{2(n+1)}$.

ここで. $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(n+1)}=0$ だから

はさみうちの原理より. $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ … ③.

②より. $n\geqq 1$のとき. $b_{n+1}=1-\frac{2(n+1)}{\pi}\cdot a_n$

$a_n=\frac{\pi}{2(n+1)}(1-b_{n+1})$.

③より. $\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ だから.

$\lim_{n\to\infty}n\cdot a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{2(n+1)}(1-b_{n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})}(1-b_{n+1})=\frac{\pi}{2}$ … ④

①より. $n\geqq 1$のとき. $a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{\pi}\cdot b_n$

$b_n=\frac{\pi}{2(n+1)}a_{n+1}$

④より. $\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}n\cdot a_n=\frac{\pi}{2}$ だから.

$\lim_{n\to\infty}n^2 b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2}{2(n+1)}a_{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2}{2(n+1)^2}\cdot(n+1)a_{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})^2}\cdot(n+1)\cdot a_{n+1}$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$

よって. $\lim_{n\to\infty}n\cdot a_n=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{n\to\infty}n^2 b_n=\frac{\pi^2}{4}$ //