令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数 学 解 答 紙 〔その一〕

氏　名

受験番号

評点欄

1

1

(1) 少なくとも１回４以上の目が出ればよいので

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{7}{8}$$

(2) 得点が４以下となる確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3$ であり

得点が３以下となる確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ なので

求める確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{37}{216}$$

(3) (i) ３回投げたときの得点が４であり，もう１回さいころを投げて５または６の目が出る確率は

(2) より $\frac{37}{216}\times\frac{2}{6}=\frac{74}{1296}$

(ii) ３回投げたときの得点が５であり，もう１回さいころを投げて６の目が出る確率は

(2) と同様に $\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3\right\}\times\frac{1}{6}=\frac{61}{1296}$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{74}{1296}+\frac{61}{1296}}{\frac{7}{8}}=\frac{5}{42}$$

令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数　学　解　答　紙　〔その二〕

氏　名

受験番号

評点欄　2

2

(1). $2x+y=1$ をみたすとき. $y=1-2x$ より

$$2x^2+y^2=2x^2+(1-2x)^2$$
$$=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$

最小値 $\frac{1}{3}$ $\left(x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{3}\right)$ //

(2). $2x^2+y^2=1$ をみたすとき、$y^2=1-2x^2$

$y^2\geqq 0$ なので. $1-2x^2\geqq 0$ より $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

このとき. 実数 k を用いて. $2x+y=k$ とおくと.

$y=-2x+k$ より

$$2x^2+(-2x+k)^2=1$$
$$6x^2-4kx+k^2-1=0 \cdots ①$$

①の判別式を D とおくと. ①が実数解をもつとき.

$$D/4=(2k)^2-6\cdot(k^2-1)\geqq 0$$
$$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}.$$

$k=\sqrt{3}$ をみたす実数 x、y が存在すれば.

最大値 $\sqrt{3}$ となる. ①に代入すると.

$$6x^2-4\sqrt{3}x+2=0.$$
$$2(\sqrt{3}x-1)^2=0$$

$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ となり $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす.

このとき $y=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

以上より

最大値 $\sqrt{3}$ $\left(x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ //

(3). $2x^2+y^2=1$ をみたすとき. (2)より

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ である.

実数 l を用いて $xy=l$ とおく

i) $x=0$ のとき. $l=0$

ii) $x\neq 0$ のとき. $y=\frac{l}{x}$ より

$$2x^2+\left(\frac{l}{x}\right)^2=1$$
$$2x^4-x^2+l^2=0$$

$x^2=t$ とおくと. $x\neq 0$ より $t>0$

$$2t^2-t+l^2=0 \cdots ②$$

②の判別式を D' とおくと. ②が実数解をもつとき.

$$D'=1^2-4\cdot 2\cdot l^2\geqq 0$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqq l\leqq\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$l=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ をみたす実数 x, y が存在すれば.

最大値 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる.

$l=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ のとき. ②に代入すると.

$$2t^2-t+\frac{1}{8}=0.$$
$$2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2=0$$

$t=\frac{1}{4}$ で $t>0$ をみたす.

このとき. $x=\pm\frac{1}{2}$ であり. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす.

$x=\pm\frac{1}{2}$ のとき $xy=l$ より $\pm\frac{1}{2}\cdot y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

以上より

最大値 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $(x,y)=\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) //

令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1) 題意より，$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ なので，$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$(s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$s\vec{a} \cdot \vec{b} - s|\vec{a}|^2 + t|\vec{b}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 2$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ なので

$$5s - 3^2 s + 2^2 t - 5t = 0$$

$$t = -4s \quad \cdots（答）$$

(2) ３点M，B，Cが同一直線上にあるとき，

$\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MB}$（kは実数）とおける．

このとき　$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$

$$= \frac{1}{2}(1-k)\vec{a} + k\vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ なので，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-k) = s \\ k = t \end{cases}$$

これと(1)の結果より，$s = -\frac{1}{2}$，$t = 2$，$k = 2$

よって　$\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} \quad \cdots（答）$

(3) 点Nは直線OC上にあるので，$\overrightarrow{ON} = l\overrightarrow{OC}$（$l$は実数）とすると，(2)の結果より

$$\overrightarrow{ON} = -\frac{1}{2}l\vec{a} + 2l\vec{b}$$

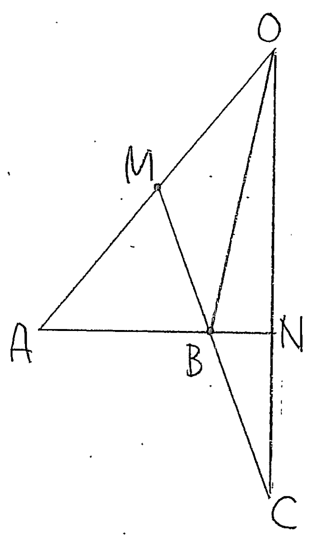
点Nは直線AB上にあるので，

$$-\frac{1}{2}l + 2l = 1$$

$$l = \frac{2}{3}$$

よって　$\overrightarrow{ON} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

$$= \frac{-\vec{a} + 4\vec{b}}{4 + (-1)}$$



以上により，点Nは線分ABを４：１に外分する点なので，　$AB : BN = 3 : 1 \quad \cdots（答）$

令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2t^2 - 1$

また

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cdot \cos\theta - \sin 2\theta \cdot \sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cdot\cos\theta - 2\sin^2\theta\cdot\cos\theta$

$= (2\cos^2\theta - 1)\cdot\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4t^3 - 3t$

よって

$y = t + a(2t^2 - 1) + 4t^3 - 3t = 4t^3 + 2at^2 - 2t - a$

(2) $g(t) = 4t^3 + 2at^2 - 2t - a$ とおく。

$g'(t) = 12t^2 + 4at - 2$

関数 $g(t)$ が $t = \frac{1}{2}$ で極値をとるから

$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 2a - 2 = 0$　ゆえに　$a = -\frac{1}{2}$

逆に，このとき

$g'(t) = 12t^2 - 2t - 2 = 2(3t+1)(2t-1)$

ここで，$t = \cos\theta$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

$g'(t) = 0$ とすると　$t = -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		↗	極大	↘	極小	↗	

$g(t)$ の増減表は上のようになり，条件を満たす。

よって　$a = -\frac{1}{2}$

(3) $t = \cos\theta$，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \pi$ より　$-1 \leqq t \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a = -\frac{1}{2}$ のとき　$g(t) = 4t^3 - t^2 - 2t + \frac{1}{2}$　なので

$g'(t) = 2(3t+1)(2t-1)$

$g'(t) = 0$ とすると　$t = -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\frac{5}{2}$	↗	$\frac{49}{54}$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

$g(t)$ の増減表は上のようになるので

$t = -\frac{1}{3}$ のとき　最大値 $\frac{49}{54}$

$t = -1$ のとき　最小値 $-\frac{5}{2}$