令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1)　少なくとも１回４以上の目が出ればよいので

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{7}{8}$$

(2)　得点が４以下となる確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3$ であり

得点が３以下となる確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ なので

求める確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{37}{216}$$

(3)　(ⅰ)　３回投げたときの得点が４であり，もう１回さいころを投げて５または６の目が出る確率は

(2)より　$\frac{37}{216}\times\frac{2}{6}=\frac{74}{1296}$

(ⅱ)　３回投げたときの得点が５であり，もう１回さいころを投げて６の目が出る確率は

(2)と同様に　$\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3\right\}\times\frac{1}{6}=\frac{61}{1296}$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{74}{1296}+\frac{61}{1296}}{\frac{7}{8}}=\frac{5}{42}$$

令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数 学 解 答 紙 〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1). $2x+y=1$ をみたすとき. $y=1-2x$ より

$$2x^2+y^2=2x^2+(1-2x)^2$$
$$=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$

最小値 $\frac{1}{3}$ $\left(x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{3}\right)$ //

(2). $2x^2+y^2=1$ をみたすとき. $y^2=1-2x^2$

$y^2\geqq 0$ なので. $1-2x^2\geqq 0$ より $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

このとき. 実数 k を用いて. $2x+y=k$ とおくと.

$y=-2x+k$ より

$2x^2+(-2x+k)^2=1$

$6x^2-4kx+k^2-1=0$ … ①

① の判別式を D とおくと. ① が実数解をもつとき.

$$D/4=(2k)^2-6\cdot(k^2-1)\geqq 0$$
$$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$$

$k=\sqrt{3}$ をみたす実数 x, y が存在すれば.

最大値 $\sqrt{3}$ となる. ① に代入すると.

$$6x^2-4\sqrt{3}x+2=0$$
$$2(\sqrt{3}x-1)^2=0$$

$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ となり $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす.

このとき $y=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

以上より

最大値 $\sqrt{3}$ $\left(x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ //

(3). $2x^2+y^2=1$ をみたすとき. (2) より

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ である.

実数 l を用いて. $xy=l$ とおく

i) $x=0$ のとき. $l=0$

ii) $x\neq 0$ のとき. $y=\frac{l}{x}$ より

$$2x^2+\left(\frac{l}{x}\right)^2=1$$
$$2x^4-x^2+l^2=0$$

$x^2=t$ とおくと. $x\neq 0$ より $t>0$

$2t^2-t+l^2=0$ … ②

② の判別式を D' とおくと. ② が実数解をもつとき.

$$D'=1^2-4\cdot 2\cdot l^2\geqq 0$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqq l\leqq\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$l=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ をみたす実数 x, y が存在すれば.

最大値 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる.

$l=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ のとき. ② に代入すると.

$$2t^2-t+\frac{1}{8}=0$$
$$2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2=0$$

$t=\frac{1}{4}$ で $t>0$ をみたす.

このとき. $x=\pm\frac{1}{2}$ であり. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす.

$x=\pm\frac{1}{2}$ のとき $xy=l$ より $\pm\frac{1}{2}\cdot y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

以上より

最大値 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $(x,y)=\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) //

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その三〕

受験番号

3

評点欄

3

(1) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2t^2 - 1$

また

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cdot \cos\theta - \sin 2\theta \cdot \sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cdot\cos\theta - 2\sin^2\theta\cdot\cos\theta$

$= (2\cos^2\theta - 1)\cdot\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cdot\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4t^3 - 3t$

よって

$y = t + a(2t^2 - 1) + 4t^3 - 3t = 4t^3 + 2at^2 - 2t - a$

(2) $g(t) = 4t^3 + 2at^2 - 2t - a$ とおく。

$g'(t) = 12t^2 + 4at - 2$

関数 $g(t)$ が $t = \frac{1}{2}$ で極値をとるから

$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 2a - 2 = 0$　ゆえに　$a = -\frac{1}{2}$

逆に，このとき

$g'(t) = 12t^2 - 2t - 2 = 2(3t+1)(2t-1)$

ここで，$t = \cos\theta$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

$g'(t) = 0$ とすると　$t = -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$g(t)$ の増減表は上のようになり，条件を満たす。

よって　$a = -\frac{1}{2}$

(3) $t = \cos\theta$，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \pi$ より　$-1 \leqq t \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a = -\frac{1}{2}$ のとき　$g(t) = 4t^3 - t^2 - 2t + \frac{1}{2}$ なので

$g'(t) = 2(3t+1)(2t-1)$

$g'(t) = 0$ とすると　$t = -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{49}{54}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

$g(t)$ の増減表は上のようになるので

$t = -\frac{1}{3}$ のとき　最大値 $\frac{49}{54}$

$t = -1$ のとき　最小値 $-\frac{5}{2}$

令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1). $h(x)=1-(1-x)e^{x}$ とおくと、

$h'(x)=e^{x}-(1-x)e^{x}$

$=xe^{x}$

$h'(x)=0$ とすると $x=0$.

$h(x)$の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	0	↗

よって、$h(x)=1-(1-x)e^{x}\geqq 0$ より

すべての実数xに対して

$(1-x)e^{x}\leqq 1$ である。

また、等号が成り立つのは、

$x=0$ のときである。//

(2). $g'(x)=-e^{x}+(2-x)\cdot e^{x}-1$

$=(1-x)e^{x}-1\leqq 0$ ($\because$ (1)より)

よって、$g(x)$は単調に減少する。

また、$g(1)=e-1>0$

$g(2)=-2<0$ である。

$g(x)$は、すべての実数で連続なので

中間値の定理より、

方程式 $g(x)=0$ が、実数解を

ただ1つもち、また、その実数解を

αとおくとき、$1<\alpha<2$ である

ことが示せた。

(3). $f'(x)=\dfrac{2x(e^{x}-x)-x^{2}(e^{x}-1)}{(e^{x}-x)^{2}}$

$=\dfrac{x\{(2-x)e^{x}-x\}}{(e^{x}-x)^{2}}$

$=\dfrac{x\cdot g(x)}{(e^{x}-x)^{2}}$

$f'(x)=0$ とすると、$x=0$ または $g(x)=0$

つまり、$x=0,\alpha$

$e^{x}-x$は常に正であるから、

(2)より、$f(x)$の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって、極大値：$f(\alpha)$.

ここで、$g(\alpha)=(2-\alpha)e^{\alpha}-\alpha=0$

かつ、$1<\alpha<2$ より、

$e^{\alpha}=\dfrac{\alpha}{2-\alpha}$ であるから、

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha^{2}}{e^{\alpha}-\alpha}$

$=\dfrac{\alpha^{2}}{\frac{\alpha}{2-\alpha}-\alpha}$

$=\dfrac{\alpha(2-\alpha)}{\alpha-1}$

よって、求める極大値は、

$\dfrac{\alpha(2-\alpha)}{\alpha-1}$ //