

氏 名

数学解答紙 [その一]

受験番号

| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | |
|--|--|--|--|--|

1

評点欄

| |
|---|
| 1 |
| |

(1) $BC = x (x > 0)$ とすると, $\triangle ABC$ において余弦定理より,

$$4^2 = x^2 + 6^2 - 2 \cdot x \cdot 6 \cdot \cos B$$

$$16 = x^2 + 36 - 12x \cdot \frac{3}{4}$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$(x-4)(x-5) = 0$$

$$x = 4, 5$$

よって, $BC = 4, 5$

(2) $\angle C$ が鋭角のとき, $\cos C = \frac{4^2 + x^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot x} > 0$ つまり $x^2 > 20$ である。

よって, $\angle C$ が鋭角のとき $BC = 5$ である。

また, $0^\circ < \angle B < 180^\circ$ より $\sin B > 0$ であるから

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって $\triangle ABC$ の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

(3) 求める外接円の半径を R とすると, $\triangle ABC$ において正弦定理より,

$$2R = \frac{4}{\sin B}$$

$$2R = \frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

また, 内接円の半径を r とすると,

$$S = \frac{1}{2} r (6 + 5 + 4)$$

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{15}{2} r$$

$$r = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

| |
|--|
| |
|--|

数学解答紙 [その二]

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|

2

(1). $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \dots \textcircled{1}$ 式)

$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6} \dots \textcircled{2}$, $\alpha^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3} \dots \textcircled{3}$ 式)

$\textcircled{1} \times 9 - \textcircled{3}$ 式)

$9\alpha - \alpha^3 = -2\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2} = \frac{1}{2}(\alpha^3 - 9\alpha)$ //

$\textcircled{1} \times 11 - \textcircled{3}$ 式)

$11\alpha - \alpha^3 = 2\sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{3} = \frac{1}{2}(-\alpha^3 + 11\alpha)$ //

$\textcircled{2}$ 式) $\sqrt{6} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 5)$ //

(2) $\frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$

$= \frac{1}{(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+1)^2-3}$

$= \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})$

$= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{2}(\alpha^3 - 9\alpha) - \frac{1}{2}(\alpha^2 - 5)\right)$

$= \frac{1}{8}(\alpha^3 - \alpha^2 - 9\alpha + 9)$ //

評点欄

| |
|---|
| 2 |
| |

(3). α が有理数と仮定する.

解1)

(1) 式) $\sqrt{6} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 5)$ 式)

(左辺) = (無理数)

(右辺) = (有理数) とは矛盾

したがって、 α は無理数である。 //

解2)

(2) 式) $\frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})$

$\frac{4}{\alpha+1} - 2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}$

$\left(\frac{4}{\alpha+1} - 2\right)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2$

$= 8 - 4\sqrt{3}$

$\therefore 4\sqrt{3} = 8 - \left(\frac{4}{\alpha+1} - 2\right)^2$

(左辺) = (無理数)

(右辺) = (有理数) とは矛盾

したがって、 α は無理数である。 //

氏 名

数学解答紙 [その三]

受験番号

| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|

3

評点欄

| |
|---|
| 3 |
| |

(1) $\vec{a}=(1, 3), \vec{b}=(3, -1)$ より

$$|\vec{a}|^2=1^2+3^2=10, \vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 3+3\cdot(-1)=0, |\vec{b}|^2=3^2+(-1)^2=10$$

また, $\vec{p}=(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}, \vec{q}=(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}$ より

$$\begin{aligned} \vec{p}\cdot\vec{q} &= \{(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}\}\cdot\{(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}\} \\ &= (\cos^3\theta)|\vec{a}|^2 + (\sin^2\theta\cdot\cos\theta + \sin\theta\cdot\cos^2\theta)\vec{a}\cdot\vec{b} + (\sin^3\theta)|\vec{b}|^2 \\ &= 10\sin^3\theta + 10\cos^3\theta \quad (\because |\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=10, \vec{a}\cdot\vec{b}=0) \end{aligned}$$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと, $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leq\theta<2\pi$ より $\frac{\pi}{4}\leq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ であるから

$$-1\leq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1 \quad \therefore -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$$

また, $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を2乗すると

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{p}\cdot\vec{q} &= 10\sin^3\theta + 10\cos^3\theta = 10(\sin^3\theta + \cos^3\theta) \\ &= 10\{(\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)\} \\ &= 10\left(t^3 - 3t\cdot\frac{t^2-1}{2}\right) \\ &= -5t^3 + 15t \end{aligned}$$

(3) $f(t)=-5t^3+15t$ ($-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$) とおくと,

$$f'(t)=-15t^2+15=-15(t+1)(t-1)$$

$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減表をかくと下のようになる。

| | | | | | | | |
|---------|--------------|-----|-------|-----|------|-----|-------------|
| t | $-\sqrt{2}$ | ... | -1 | ... | 1 | ... | $\sqrt{2}$ |
| $f'(t)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(t)$ | $-5\sqrt{2}$ | ↘ | -10 | ↗ | 10 | ↘ | $5\sqrt{2}$ |

よって, $f(t)$ すなわち内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ は

$t=1$ のとき 最大値 10 , $t=-1$ のとき 最小値 -10 をとる。

$$t=1 \text{ のとき } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{4}\leq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi \text{ から } \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \quad \text{ゆえに } \theta=0, \frac{\pi}{2}$$

$$t=-1 \text{ のとき } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{4}\leq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi \text{ から } \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \quad \text{ゆえに } \theta=\pi, \frac{3}{2}\pi$$

したがって, 内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ は

$\theta=0, \frac{\pi}{2}$ のとき 最大値 10 , $\theta=\pi, \frac{3}{2}\pi$ のとき 最小値 -10 をとる。

氏名

数学解答紙 [その四]

受験番号

4

評点欄

| |
|---|
| 4 |
| |

(1) $f'(x) = -3x^2 + 4$

よって、 $y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

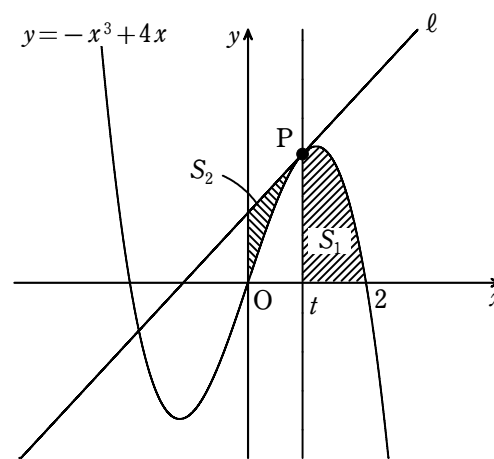
$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$y - (-t^3 + 4t) = (-3t^2 + 4)(x - t)$$

$$y = (-3t^2 + 4)x + 2t^3$$

(2) $S_1(t) = \int_t^2 (-x^3 + 4x) dx$
 $= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_t^2$
 $= \frac{1}{4}t^4 - 2t^2 + 4$

(3) $S_2(t) = \int_0^t \{(-3t^2 + 4)x + 2t^3 - (-x^3 + 4x)\} dx$
 $= \int_0^t (x^3 - 3t^2x + 2t^3) dx$
 $= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t^3x \right]_0^t$
 $= \frac{3}{4}t^4$



(4) (2), (3) より

$$S(t) = \left(\frac{1}{4}t^4 - 2t^2 + 4 \right) + \frac{3}{4}t^4 = t^4 - 2t^2 + 4 \quad (0 < t < 2)$$

よって

$$S'(t) = 4t^3 - 4t = 4t(t+1)(t-1)$$

だから、 $0 < t < 2$ における $S(t)$ の増減は次の通り。

| | | | | | |
|---------|---|-----|---|-----|---|
| t | 0 | ... | 1 | ... | 2 |
| $S'(t)$ | | - | 0 | + | |
| $S(t)$ | | ↘ | 3 | ↗ | |

増減表より、 $S(t)$ の最小値は 3 ($t=1$ のとき) である。