令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) BC$=x$ $(x>0)$ とすると，△ABCにおいて余弦定理より，

$$4^2=x^2+6^2-2\cdot x\cdot 6\cdot\cos B$$

$$16=x^2+36-12x\cdot\frac{3}{4}$$

$$x^2-9x+20=0$$

$$(x-4)(x-5)=0$$

$$x=4,\ 5$$

よって，BC=4, 5

(2) ∠Cが鋭角のとき，$\cos C=\dfrac{4^2+x^2-6^2}{2\cdot 4\cdot x}>0$　つまり　$x^2>20$ である。

よって，∠Cが鋭角のとき BC=5 である。

また，$0^\circ<\angle B<180^\circ$ より $\sin B>0$ であるから

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって △ABCの面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\sin B=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

(3) 求める外接円の半径を R とすると，△ABCにおいて正弦定理より，

$$2R=\frac{4}{\sin B}$$

$$2R=\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$R=\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

また，内接円の半径を r とすると，

$$S=\frac{1}{2}r(6+5+4)$$

$$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{15}{2}r$$

$$r=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数学解答紙〔その二〕

氏名

受験番号

評点欄

2

2

(1). $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ より

$\alpha^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\underline{5+2\sqrt{6}}$ //

$\alpha^3=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3=\underline{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}$ //

(2). $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdots$ ①.

$\alpha^2=5+2\sqrt{6}\cdots$ ②

$\alpha^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}\cdots$ ③ より

①×9 − ③ より

$9\alpha-\alpha^3=-2\sqrt{2}.$

$\therefore \underline{\sqrt{2}=\frac{1}{2}(\alpha^3-9\alpha)}$ //

①×11 − ③ より

$11\alpha-\alpha^3=2\sqrt{3}$

$\therefore \underline{\sqrt{3}=\frac{1}{2}(-\alpha^3+11\alpha)}$ //

② より $\underline{\sqrt{6}=\frac{1}{2}(\alpha^2-5)}$ //

(3)

$\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$

$=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+1)^2-3}$

$=\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})$

$=\frac{1}{4}\left(2+\frac{1}{2}(\alpha^3-9\alpha)-\frac{1}{2}(\alpha^2-5)\right)$

$=\underline{\frac{1}{8}(\alpha^3-\alpha^2-9\alpha+9)}$ //

(4). αが有理数と仮定する

(2) より $\sqrt{6}=\frac{1}{2}(\alpha^2-5)$

(左辺) = (無理数)

(右辺) = (有理数) より 矛盾.

<u>したがって. αは無理数である.</u> //

氏　　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1)　$\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(3,-1)$ より

$|\vec{a}|^2=1^2+3^2=10$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3+3\cdot(-1)=0$, $|\vec{b}|^2=3^2+(-1)^2=10$

また，$\vec{p}=(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$, $\vec{q}=(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}$ より

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=\{(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}\}\cdot\{(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}\}\\&=(\cos^3\theta)|\vec{a}|^2+(\sin^2\theta\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos^2\theta)\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sin^3\theta)|\vec{b}|^2\\&=10\sin^3\theta+10\cos^3\theta\quad(\because|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=10,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0)\end{aligned}$$

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ であるから

$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$　　　$\therefore$　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

また，$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を２乗すると

$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$　　　$\therefore$　$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$

よって

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=10\sin^3\theta+10\cos^3\theta=10(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\\&=10\{(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\}\\&=10\left(t^3-3t\cdot\frac{t^2-1}{2}\right)\\&=-5t^3+15t\end{aligned}$$

(3)　$f(t)=-5t^3+15t$　$(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とおくと，

$f'(t)=-15t^2+15=-15(t+1)(t-1)$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減表をかくと下のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-5\sqrt{2}$	↘	-10	↗	10	↘	$5\sqrt{2}$

よって，$f(t)$ すなわち内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ は

$t=1$ のとき　最大値 10，　$t=-1$ のとき　最小値 -10　をとる。

$t=1$ のとき　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ から　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$　　ゆえに　$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$

$t=-1$ のとき　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ から　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$　　ゆえに　$\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

したがって，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ は

$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき　最大値 10，　$\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$ のとき　最小値 -10　をとる。

氏　　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

④

4

(1). $f'(x)=4x+1$ より，$f'(1)=5$.

よって，直線lの方程式は，

$y-4=5(x-1)$ より．　$l: y=5x-1$

(2). 直線l, mが x軸の正の向きとなす角をそれぞれ α, β とおくと，

(1)より．$\tan\alpha=5>1$ だから　$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

$\beta=\alpha+\frac{\pi}{4}$ のとき，$\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3}{4}\pi$ より．$\tan\beta<0$ となるので

mの傾きが負となり不適.

$\beta=\alpha-\frac{\pi}{4}$ のとき．$\tan\beta=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{5-1}{1+5\cdot1}=\frac{2}{3}$$

これは，mの傾きが正となり適する.

よって，直線mの方程式は

$y-4=\frac{2}{3}(x-1)$ より．　$m: y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$

(3). 求める面積をSとすると，

$$S=\int_0^1\left\{\left(\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}\right)-(2x^2+x+1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(-2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{3}x\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{2}$$

よって，$S=\frac{3}{2}$