令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数 学 解 答 紙 〔その一〕

氏　　名

受験番号

評 点 欄

1

1

(1) BC$=x$ $(x>0)$ とすると，△ABCにおいて余弦定理より，

$$4^2=x^2+6^2-2\cdot x\cdot 6\cdot\cos B$$

$$16=x^2+36-12x\cdot\frac{3}{4}$$

$$x^2-9x+20=0$$

$$(x-4)(x-5)=0$$

$$x=4,\ 5$$

よって，BC=4, 5

(2) ∠Cが鋭角のとき，$\cos C=\dfrac{4^2+x^2-6^2}{2\cdot 4\cdot x}>0$　つまり　$x^2>20$ である。

よって，∠Cが鋭角のとき BC=5 である。

また，$0°<\angle B<180°$ より $\sin B>0$ であるから

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって△ABCの面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\sin B=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

(3) 求める外接円の半径を R とすると，△ABCにおいて正弦定理より，

$$2R=\frac{4}{\sin B}$$

$$2R=\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$R=\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

また，内接円の半径を r とすると，

$$S=\frac{1}{2}r(6+5+4)$$

$$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{15}{2}r$$

$$r=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数　学　解　答　紙　〔その二〕

氏　　名

受験番号

評点欄

2

2

(1). $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ より

$\alpha^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ //

$\alpha^3=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ //

(2). $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdots$①

$\alpha^2=5+2\sqrt{6}\cdots$②

$\alpha^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}\cdots$③ より

①×9 − ③ より

$9\alpha-\alpha^3=-2\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}=\frac{1}{2}(\alpha^3-9\alpha)$ //

①×11 − ③ より

$11\alpha-\alpha^3=2\sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{3}=\frac{1}{2}(-\alpha^3+11\alpha)$ //

② より $\sqrt{6}=\frac{1}{2}(\alpha^2-5)$ //

(3)

$\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$

$=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+1)^2-3}$

$=\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})$

$=\frac{1}{4}\left(2+\frac{1}{2}(\alpha^3-9\alpha)-\frac{1}{2}(\alpha^2-5)\right)$

$=\frac{1}{8}(\alpha^3-\alpha^2-9\alpha+9)$ //

(4). αが有理数と仮定する

(2) より $\sqrt{6}=\frac{1}{2}(\alpha^2-5)$

(左辺)=(無理数)

(右辺)=(有理数) より 矛盾.

したがって. αは無理数である. //

氏　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

3

評点欄

3

(1)　$\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(3,-1)$ より

$|\vec{a}|^2=1^2+3^2=10$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3+3\cdot(-1)=0$, $|\vec{b}|^2=3^2+(-1)^2=10$

また，$\vec{p}=(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$, $\vec{q}=(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}$ より

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\{(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}\}\cdot\{(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}\}$$
$$=(\cos^3\theta)|\vec{a}|^2+(\sin^2\theta\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos^2\theta)\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sin^3\theta)|\vec{b}|^2$$
$$=10\sin^3\theta+10\cos^3\theta\quad(\because |\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=10,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0)$$

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ であるから

$$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1\qquad\therefore\ -\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

また，$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を２乗すると

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta\qquad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

よって

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=10\sin^3\theta+10\cos^3\theta=10(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$$
$$=10\{(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\}$$
$$=10\left(t^3-3t\cdot\frac{t^2-1}{2}\right)$$
$$=-5t^3+15t$$

(3)　$f(t)=-5t^3+15t\ (-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とおくと，

$$f'(t)=-15t^2+15=-15(t+1)(t-1)$$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減表をかくと下のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-5\sqrt{2}$	↘	-10	↗	10	↘	$5\sqrt{2}$

よって，$f(t)$ すなわち内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ は

$t=1$ のとき　最大値 10，　$t=-1$ のとき　最小値 -10　をとる。

$t=1$ のとき　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ から　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$　ゆえに　$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$

$t=-1$ のとき　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ から　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$　ゆえに　$\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

したがって，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ は

$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき　最大値 10，　$\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$ のとき　最小値 -10　をとる。

令和３年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その四〕

受験番号

4

評点欄

4

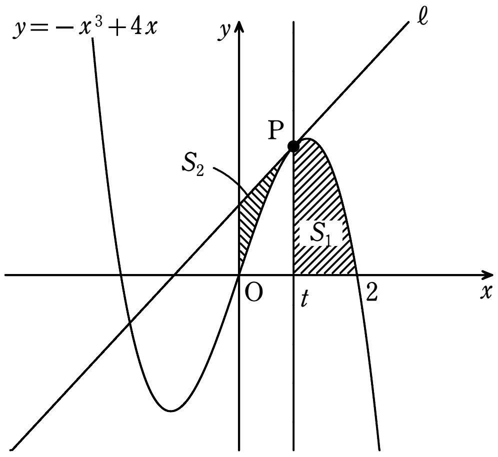
(1)　$f'(x)=-3x^2+4$

よって，$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(-t^3+4t)=(-3t^2+4)(x-t)$$

$$y=(-3t^2+4)x+2t^3$$



(2)　$S_1(t)=\int_t^2(-x^3+4x)dx$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_t^2$$

$$=\frac{1}{4}t^4-2t^2+4$$

(3)　$S_2(t)=\int_0^t\{(-3t^2+4)x+2t^3-(-x^3+4x)\}dx$

$$=\int_0^t(x^3-3t^2x+2t^3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\right]_0^t$$

$$=\frac{3}{4}t^4$$

(4)　(2)，(3) より

$$S(t)=\left(\frac{1}{4}t^4-2t^2+4\right)+\frac{3}{4}t^4=t^4-2t^2+4\quad(0<t<2)$$

よって

$$S'(t)=4t^3-4t=4t(t+1)(t-1)$$

だから，$0<t<2$ における $S(t)$ の増減は次の通り。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	3	↗	

増減表より，$S(t)$ の最小値は 3 （$t=1$ のとき）である。