令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

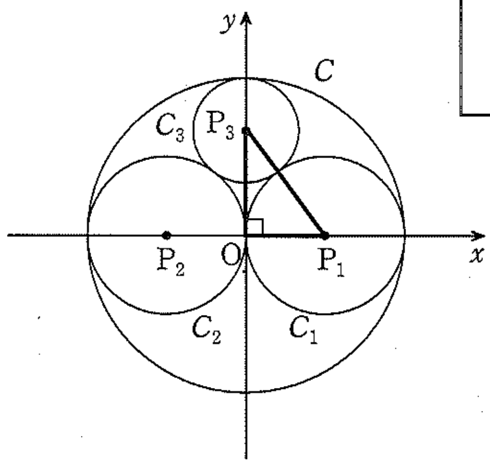
数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

1

評 点 欄

1



(1)　円 C_3 は C に内接するので　$OP_3=2-r$

C_3 は C_1 と外接するので　$P_1P_3=r+1$

$\triangle OP_1P_3$ は直角三角形であるから，三平方の定理より

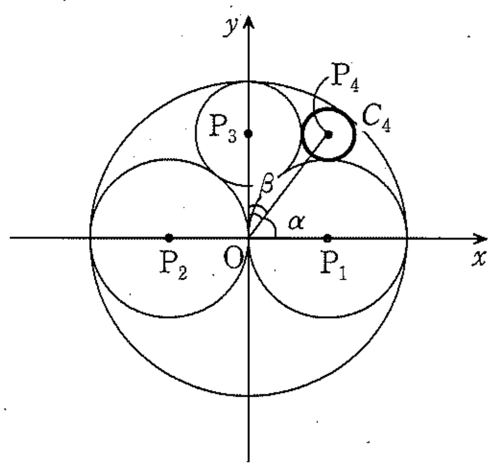
$$(r+1)^2=(2-r)^2+1^2$$

$$r^2+2r+1=4-4r+r^2+1$$

よって　$r=\dfrac{2}{3}$ ($r>0$ を満たす)

(2)　C_4 の中心の x 座標が正なので，α，β は図のようになり，

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である。



円 C_4 は C に内接するので　$OP_4=2-s$

C_4 と C_1 は外接するので　$P_1P_4=s+1$

$\triangle OP_1P_4$ において余弦定理より，

$$\cos\alpha=\frac{1^2+(2-s)^2-(s+1)^2}{2\cdot 1\cdot (2-s)}=\frac{2-3s}{2-s}$$

また，C_4 と C_3 は外接するので　$P_3P_4=s+\dfrac{2}{3}$

(1) の結果から　$OP_3=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

$\triangle OP_3P_4$ において余弦定理より，

$$\cos\beta=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2+(2-s)^2-\left(s+\frac{2}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{4}{3}\cdot(2-s)}=\frac{2-2s}{2-s}$$

(3)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ より　$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　であるから，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

また，(2) の結果を代入すると，

$$\left(\frac{2-3s}{2-s}\right)^2+\left(\frac{2-2s}{2-s}\right)^2=1$$

$$(2-3s)^2+(2-2s)^2=(2-s)^2$$

$$3s^2-4s+1=0$$

$$(3s-1)(s-1)=0$$

$$s=\frac{1}{3},\ 1$$

ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha>0$，$\cos\beta>0$　　$\therefore$　$s=\dfrac{1}{3}$

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1)　ポイントが正であるくじを少なくとも１本引けばよいので

$$1-\frac{{}_5C_2}{{}_{20}C_2}=1-\frac{\frac{5\cdot4}{2\cdot1}}{\frac{20\cdot19}{2\cdot1}}=1-\frac{1}{19}=\frac{18}{19}$$

(2)　(ｉ) 20 ポイントのくじを１本と０ポイントのくじを１本引くとき

$$\frac{{}_2C_1\times{}_5C_1}{{}_{20}C_2}=\frac{2\times5}{190}=\frac{10}{190}$$

(ⅱ) 10 ポイントのくじを２本引くとき

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{\frac{5\cdot4}{2\cdot1}}{190}=\frac{10}{190}$$

(ｉ), (ⅱ) より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{10}{190}}{\frac{10}{190}+\frac{10}{190}}=\frac{1}{2}$$

(3)　(ｉ) $a=1$ のとき

20 ポイントのくじを１本と０ポイントのくじを１本引けばよいので

$$\frac{{}_2C_1\times{}_9C_1}{{}_{20}C_2}=\frac{2\times9}{190}=\frac{5}{95}$$

(ⅱ) $a\geqq2$ のとき

(2)と同様に，「20 ポイントのくじを１本と０ポイントのくじを１本引く」または「10 ポイントのくじを２本引く」のどちらかとなればよいので

$$\frac{{}_2C_1\times{}_{10-a}C_1}{{}_{20}C_2}+\frac{{}_aC_2}{{}_{20}C_2}=\frac{2\times(10-a)+\frac{a(a-1)}{2\cdot1}}{190}=\frac{a^2-5a+40}{380}$$

これは，$a=1$ のときも満たす。

(ｉ), (ⅱ) より，求める確率を $P(a)$ とすると，$P(a)=\dfrac{a^2-5a+40}{380}$

また，$f(a)=a^2-5a+40$ とすると，

$$f(a)=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{135}{4}$$

a は１以上９以下の整数より，$f(a)$ が最小となる a の値は $a=2,\ 3$

以上より，$P(a)$ が最小となる a の値は $a=2,\ 3$

氏　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1) $S_{n+1}-S_n=2^{n+1}\cdot(n+1)-2^n\cdot n=2^n\cdot(n+2)$

よって $\underline{P_1(x)=x+2}$

また $S_{n+1}-S_n=2^n\cdot P_1(n)$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(S_{k+1}-S_k)=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot P_1(k) \quad \text{——①}$$

①の左辺について

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(S_{k+1}-S_k)&=(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+(S_4-S_3)+\cdots+(S_{n+1}-S_n)\\&=S_{n+1}-S_1\\&=2^n\cdot(2n+2)-2\end{aligned}$$

この結果と①より $\underline{P_2(x)=2x+2,\ a=-2}$

(2) ①の右辺について

$$\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot(k+2)=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k+\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k+4\cdot2^n-4$$

この結果と(1)の結果と①より

$$2^n\cdot(2n+2)-2=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k+4\cdot2^n-4$$

これを整理して

$$\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k=2^n\cdot(2n-2)+2$$

よって $\underline{Q(x)=2x-2,\ b=2}$

(3) $T_{n+1}-T_n=2^{n+1}\cdot(n+1)^2-2^n\cdot n^2=2^n\cdot(n^2+4n+2)$

よって $\underline{R_1(x)=x^2+4x+2}$

また $T_{n+1}-T_n=2^n\cdot R_1(n)$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(T_{k+1}-T_k)=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot R_1(k) \quad \text{——②}$$

②の左辺について

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(T_{k+1}-T_k)&=(T_2-T_1)+(T_3-T_2)+(T_4-T_3)+\cdots+(T_{n+1}-T_n)\\&=T_{n+1}-T_1=2^n(2n^2+4n+2)-2\end{aligned}$$

②の右辺について

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot(k^2+4k+2)&=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k^2+4\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k+\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k^2+4\{2^n(2n-2)+2\}+4\cdot2^n-4\\&=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k^2+2^n(8n-4)+4\end{aligned}$$

これらの結果と②より

$$2^n(2n^2+4n+2)-2=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k^2+2^n(8n-4)+4$$

これを整理して

$$\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot k^2=2^n\cdot(2n^2-4n+6)-6$$

よって $\underline{R_2(x)=2x^2-4x+6,\ c=-6}$

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数 学 解 答 紙 〔その四〕

受験番号

評点欄 4

4

(1). $f(x) = \int (x^2 - 3x)\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$ より

（Cは積分定数）

$g(t) = f(3t+3) - f(t)$

$= \frac{1}{3}(3t+3)^3 - \frac{3}{2}(3t+3)^2 + C$

$- \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + C\right)$

$= \frac{26}{3}t^3 + 15t^2 - \frac{9}{2}$ //

(2). $g'(t) = 26t^2 + 30t$

$= 2t(13t + 15)$

よって、増減表は下のようになる。

t	$\cdots$	$-\frac{15}{13}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗		↘		↗

したがって、

極大値をとるtの値は、$t = -\frac{15}{13}$

極小値をとるtの値は、$t = 0$ //

(3). $g(t) = f(3t+3) - f(t)$ より

$t = -\frac{3}{2}$のとき

$g\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) - f\left(-\frac{3}{2}\right)$

$= 0$ より

$t = -\frac{3}{2}$ は、$g(t) = 0$ の1つの解である。

また、

$\frac{26}{3}t^3 + 15t^2 - \frac{9}{2} = 0$

$52t^3 + 90t^2 - 27 = 0$

$(2t+3)(26t^2 + 6t - 9) = 0$

$t = -\frac{3}{2},\ \frac{-3 \pm 9\sqrt{3}}{26}$ //