令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

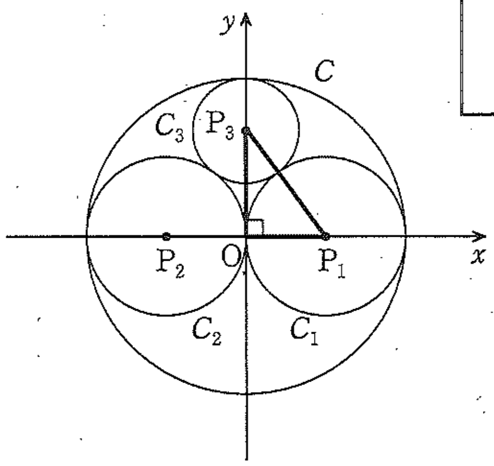
数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1



(1)　円 C_3 は C に内接するので　$OP_3=2-r$

C_3 は C_1 と外接するので　$P_1P_3=r+1$

$\triangle OP_1P_3$ は直角三角形であるから，三平方の定理より

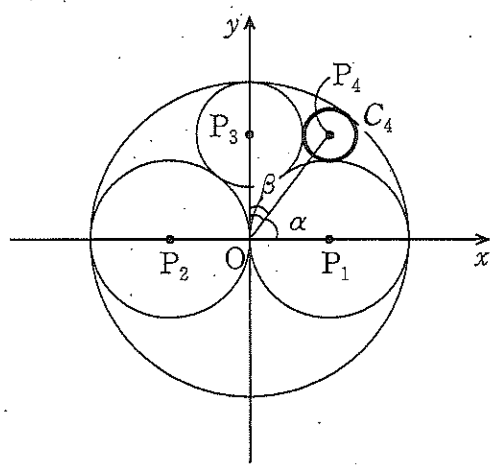
$$(r+1)^2=(2-r)^2+1^2$$

$$r^2+2r+1=4-4r+r^2+1$$

よって　$r=\dfrac{2}{3}$ ($r>0$ を満たす)

(2)　C_4 の中心の x 座標が正なので，α，β は図のようになり，

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である。



円 C_4 は C に内接するので　$OP_4=2-s$

C_4 と C_1 は外接するので　$P_1P_4=s+1$

$\triangle OP_1P_4$ において余弦定理より，

$$\cos\alpha=\frac{1^2+(2-s)^2-(s+1)^2}{2\cdot1\cdot(2-s)}=\frac{2-3s}{2-s}$$

また，C_4 と C_3 は外接するので　$P_3P_4=s+\dfrac{2}{3}$

(1) の結果から　$OP_3=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

$\triangle OP_3P_4$ において余弦定理より，

$$\cos\beta=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2+(2-s)^2-\left(s+\frac{2}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{4}{3}\cdot(2-s)}=\frac{2-2s}{2-s}$$

(3)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ より　$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　であるから，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

また，(2) の結果を代入すると，

$$\left(\frac{2-3s}{2-s}\right)^2+\left(\frac{2-2s}{2-s}\right)^2=1$$

$$(2-3s)^2+(2-2s)^2=(2-s)^2$$

$$3s^2-4s+1=0$$

$$(3s-1)(s-1)=0$$

$$s=\frac{1}{3},\ 1$$

ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha>0$，$\cos\beta>0$　　$\therefore$　$s=\dfrac{1}{3}$

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数学解答紙〔その二〕

氏　名

受験番号

評点欄

2

2

(1)　ポイントが正であるくじを少なくとも１本引けばよいので

$$1-\frac{{}_5C_2}{{}_{20}C_2}=1-\frac{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}{\frac{20\cdot 19}{2\cdot 1}}=1-\frac{1}{19}=\frac{18}{19}$$

(2)　(ⅰ) 20 ポイントのくじを１本と０ポイントのくじを１本引くとき

$$\frac{{}_2C_1\times{}_5C_1}{{}_{20}C_2}=\frac{2\times 5}{190}=\frac{10}{190}$$

(ⅱ) 10 ポイントのくじを２本引くとき

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}{190}=\frac{10}{190}$$

(ⅰ), (ⅱ) より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{10}{190}}{\frac{10}{190}+\frac{10}{190}}=\frac{1}{2}$$

(3)　(ⅰ) $a=1$ のとき

20 ポイントのくじを１本と０ポイントのくじを１本引けばよいので

$$\frac{{}_2C_1\times{}_9C_1}{{}_{20}C_2}=\frac{2\times 9}{190}=\frac{5}{95}$$

(ⅱ) $a\geqq 2$ のとき

(2)と同様に，「20 ポイントのくじを１本と０ポイントのくじを１本引く」または「10 ポイントのくじを２本引く」のどちらかとなればよいので

$$\frac{{}_2C_1\times{}_{10-a}C_1}{{}_{20}C_2}+\frac{{}_aC_2}{{}_{20}C_2}=\frac{2\times(10-a)+\frac{a(a-1)}{2\cdot 1}}{190}=\frac{a^2-5a+40}{380}$$

これは，$a=1$ のときも満たす。

(ⅰ), (ⅱ) より，求める確率を $P(a)$ とすると，$P(a)=\dfrac{a^2-5a+40}{380}$

また，$f(a)=a^2-5a+40$ とすると，

$$f(a)=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{135}{4}$$

a は１以上９以下の整数より，$f(a)$ が最小となる a の値は $a=2,\ 3$

以上より，$P(a)$ が最小となる a の値は $a=2,\ 3$

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1). $\dfrac{dx}{dt}=r\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=r(\cos t-1)$.

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=r\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-r\sin t$.

よって. $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)=\underline{(r\sin t, r(\cos t-1))}$ //

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\underline{(r\cos t,-r\sin t)}$ //

(2). $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(r\cos t)^2+(-r\sin t)^2}=r$ $(\because r>0)$.

よって. $|\vec{\alpha}|$ は一定である //

(3). 求める道のりを L とすると.

$$L=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\vec{v}|\,dt$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{(r\sin t)^2+\{r(\cos t-1)\}^2}\,dt$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{r^2(2-2\cos t)}\,dt$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{r^2\cdot 4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left|2r\cdot\sin\frac{t}{2}\right|\,dt$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}2r\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt \quad \left(r>0,\ \frac{\pi}{2}\leqq\frac{t}{2}\leqq\frac{3}{4}\pi\right).$$

$$=2r\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$=-4r\left(\cos\frac{3}{4}\pi-\cos\frac{\pi}{2}\right).$$

$$=\underline{2\sqrt{2}\,r}\ //$$

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1) $|\alpha|^2=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

よって

$$\alpha^n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

(2) $|\alpha^n|=|\alpha|^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ より，$|\alpha^n|>\dfrac{1}{32}$ のとき，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n>\dfrac{1}{32}=\dfrac{1}{2^5}$

これを満たす最大の正の整数は9

$\therefore\quad n_1=9$

(3) $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ より

$$\begin{aligned}|\alpha^n+(\overline{\alpha})^n|&=\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right)\right\}\right|\\&=\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\times2\cos\frac{n\pi}{6}\right|\qquad\cdots①\end{aligned}$$

$|\alpha^n+(\overline{\alpha})^n|>\dfrac{1}{16}$ のとき，$\left|\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\dfrac{n\pi}{6}\right|>\dfrac{1}{32}$ であり，

$\left|\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\times\cos\dfrac{n\pi}{6}\right|\leqq\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ なので，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\geqq\left|\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\dfrac{n\pi}{6}\right|>\dfrac{1}{32}$

よって(2)より，$n\leqq9$でなければならない。

i) $n=9$ のとき

①より $|\alpha^n+(\overline{\alpha})^n|=0$ となるので不適。

ii) $n=8$ のとき

①より $|\alpha^n+(\overline{\alpha})^n|=\dfrac{1}{16}$ となるので不適。

iii) $n=7$ のとき

①より $|\alpha^n+(\overline{\alpha})^n|=\left|\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^7\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{32}>\dfrac{1}{16}$ となるので適する。

以上より，$n_2=7$