令和４年度入学試験

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) $D(x,\ y,\ z)$とする。

$OD^2=x^2+y^2+z^2=4$, $AD^2=(x-2)^2+y^2+z^2=4$,

$BD^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=4$, $CD^2=x^2+(y-2)^2+z^2=4$　であり

これを解くと　$x=1,\ y=1,\ z=\pm\sqrt{2}$　よって　$D_1(1,\ 1,\ \sqrt{2})$, $D_2(1,\ 1,\ -\sqrt{2})$

(2) $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP}=a(2,\ 0,\ 0)+b(1,\ 1,\ \sqrt{2})-(1,\ 1,\ 0)=(2a+b-1,\ b-1,\ \sqrt{2}b)$

$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{OA}$　より　$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OA}=0$　なので

$(2a+b-1)\cdot 2+(b-1)\cdot 0+\sqrt{2}b\cdot 0=0$　よって　$2a+b-1=0$

また，$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{OD_1}$　より　$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OD_1}=0$　なので

$(2a+b-1)\cdot 1+(b-1)\cdot 1+\sqrt{2}b\cdot\sqrt{2}=0$　よって　$a+2b-1=0$

これを解くと，$a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$

(3) (2)の点Pは正八面体Vの中心なので，球Sの中心となる。

ここで，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OD_1}$とすると，点Eは平面$OAD_1$上の点であり，(2)より$\overrightarrow{PE}\perp$(平面$OAD_1$)なので

点Eは正八面体Vと球Sの接点である。

よって，求める球Sの半径は$|\overrightarrow{PE}|$であり

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}(2,\ 0,\ 0)+\dfrac{1}{3}(1,\ 1,\ \sqrt{2})=\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ より $\overrightarrow{PE}=\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)-(1,\ 1,\ 0)=\left(0,\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

なので，半径は　$\sqrt{0^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

また，Vの各面$\triangle D_1OA$, $\triangle D_1AB$, $\triangle D_1BC$, $\triangle D_1CO$, $\triangle D_2OA$, $\triangle D_2AB$, $\triangle D_2BC$, $\triangle D_2CO$と球Sとの接点を順にE_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8とするとこの８点はそれぞれの三角形の重心となるので

$E_1\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_2\left(\dfrac{5}{3},\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_3\left(1,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_4\left(\dfrac{1}{3},\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$,

$E_5\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_6\left(\dfrac{5}{3},\ 1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_7\left(1,\ \dfrac{5}{3},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_8\left(\dfrac{1}{3},\ 1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$　より

$\overrightarrow{E_1E_2}=\overrightarrow{E_4E_3}=\overrightarrow{E_5E_6}=\overrightarrow{E_8E_7}=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 0\right)$, $\overrightarrow{E_1E_4}=\overrightarrow{E_2E_3}=\overrightarrow{E_5E_8}=\overrightarrow{E_6E_7}=\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 0\right)$

$\overrightarrow{E_1E_5}=\overrightarrow{E_2E_6}=\overrightarrow{E_3E_7}=\overrightarrow{E_4E_8}=\left(0,\ 0,\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　なので

$|\overrightarrow{E_1E_2}|=|\overrightarrow{E_4E_3}|=|\overrightarrow{E_5E_6}|=|\overrightarrow{E_8E_7}|=|\overrightarrow{E_1E_4}|=|\overrightarrow{E_2E_3}|$

$=|\overrightarrow{E_5E_8}|=|\overrightarrow{E_6E_7}|=|\overrightarrow{E_1E_5}|=|\overrightarrow{E_2E_6}|=|\overrightarrow{E_3E_7}|=|\overrightarrow{E_4E_8}|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_5}=\overrightarrow{E_1E_4}\cdot\overrightarrow{E_1E_5}=0$　より　$\overrightarrow{E_1E_2}\perp\overrightarrow{E_1E_4}$　かつ　$\overrightarrow{E_1E_2}\perp\overrightarrow{E_1E_5}$　かつ　$\overrightarrow{E_1E_4}\perp\overrightarrow{E_1E_5}$

よって，求める凸多面体はすべての面が１辺の長さが$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$の正方形からなる立体である。

以上より，求める凸多面体は立方体であり，各辺の長さは$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$である。

令和４年度入学試験

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1)

表が出る回数がちょうど6回目の試行で5となるのは，5回目までに表が4回，裏が1回出て，6回目の試行で表が出るときだから，

$$P_6 = {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2} = \frac{5}{64}$$

(2)

表が出る回数がちょうどn回目の試行で5となるのは，$(n-1)$回目までに表が4回，裏が$(n-5)$回出て，n回目の試行で表が出るときだから，

$$P_n = {}_{n-1}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\times\frac{1}{2}$$

$$= {}_{n-1}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot2^{n+3}}$$

(3)

(2)の結果から

$$P_{n+1} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}$$

であるから，

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}\cdot\frac{3\cdot2^{n+3}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$= \frac{n}{2(n-4)}$$

ここで，

$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ とすると，

$$\frac{n}{2(n-4)} > 1$$

$$n > 2(n-4)$$

$$n < 8$$

よって，$5 \leqq n < 8$ のとき $P_n < P_{n+1}$ が成り立つ。

同様に考えて，

$n = 8$ のとき $P_n = P_{n+1}$

$n > 8$ のとき $P_n > P_{n+1}$

が成り立つから，

$$P_5 < P_6 < P_7 < P_8 = P_9 > P_{10} > P_{11} > \cdots\cdots$$

したがって，

$n = 8, 9$ のとき P_n は最大値 $\frac{35}{256}$ をとる。

令和４年度入学試験

氏　名

数 学 解 答 紙 〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1) $y'=2x$ より 直線 l の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$

$$y=2tx-t^2 \quad \cdots(答)$$

(2) l と x 軸の交点の x 座標は

$2tx-t^2=0$ より $x=\frac{t}{2}$

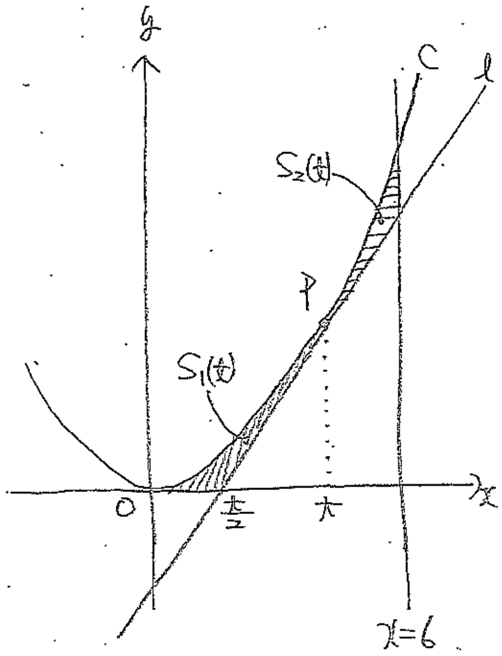
よって

$$S_1(t)=\int_0^{\frac{t}{2}} x^2dx+\int_{\frac{t}{2}}^{t}\{x^2-(2tx-t^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{t}{2}}+\int_{\frac{t}{2}}^{t}(x-t)^2dx$$

$$=\frac{1}{24}t^3+\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{\frac{t}{2}}^{t}$$

$$=\frac{1}{24}t^3+\frac{1}{24}t^3=\frac{1}{12}t^3$$



$$S_2(t)=\int_t^6\{x^2-(2tx-t^2)\}dx$$

$$=\int_t^6(x-t)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_t^6$$

$$=\frac{1}{3}(6-t)^3$$

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$$

$$=\frac{1}{12}t^3+\frac{1}{3}(6-t)^3$$

$$=-\frac{1}{4}t^3+6t^2-36t+72 \quad \cdots(答)$$

(3) $$S'(t)=-\frac{3}{4}t^2+12t-36$$

$$=-\frac{3}{4}(t^2-16t+48)$$

$$=-\frac{3}{4}(t-4)(t-12)$$

$S'(t)=0$ とすると、$2\leqq t\leqq 5$ より $t=4$

t	2		4		5
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	22	↘	8	↗	$\frac{43}{4}$

増減表より

$t=2$ のとき 最大値 22
$t=4$ のとき 最小値 8 $\cdots$(答)