令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1)　$D(x,\ y,\ z)$ とする。

$OD^2=x^2+y^2+z^2=4$，$AD^2=(x-2)^2+y^2+z^2=4$，

$BD^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=4$，$CD^2=x^2+(y-2)^2+z^2=4$　であり

これを解くと　$x=1$，$y=1$，$z=\pm\sqrt{2}$　よって　$D_1(1,\ 1,\ \sqrt{2})$，$D_2(1,\ 1,\ -\sqrt{2})$

(2)　$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP}=a(2,\ 0,\ 0)+b(1,\ 1,\ \sqrt{2})-(1,\ 1,\ 0)=(2a+b-1,\ b-1,\ \sqrt{2}b)$

$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{OA}$　より　$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OA}=0$　なので

$(2a+b-1)\cdot 2+(b-1)\cdot 0+\sqrt{2}b\cdot 0=0$　よって　$2a+b-1=0$

また，$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{OD_1}$　より　$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OD_1}=0$　なので

$(2a+b-1)\cdot 1+(b-1)\cdot 1+\sqrt{2}b\cdot\sqrt{2}=0$　よって　$a+2b-1=0$

これを解くと，$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{3}$

(3)　(2) の点 P は正八面体 V の中心なので，球 S の中心となる。

ここで，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD_1}$ とすると，点 E は平面 OAD_1 上の点であり，(2) より $\overrightarrow{PE}\perp(\text{平面}OAD_1)$ なので

点 E は正八面体 V と球 S の接点である。

よって，求める球 S の半径は $|\overrightarrow{PE}|$ であり

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(2,\ 0,\ 0)+\frac{1}{3}(1,\ 1,\ \sqrt{2})=\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ より $\overrightarrow{PE}=\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)-(1,\ 1,\ 0)=\left(0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

なので，半径は　$\sqrt{0^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

また，V の各面 $\triangle D_1OA$，$\triangle D_1AB$，$\triangle D_1BC$，$\triangle D_1CO$，$\triangle D_2OA$，$\triangle D_2AB$，$\triangle D_2BC$，$\triangle D_2CO$ と球 S との接点を順に E_1，E_2，E_3，E_4，E_5，E_6，E_7，E_8 とするとこの 8 点はそれぞれの三角形の重心となるので

$E_1\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$E_2\left(\frac{5}{3},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$E_3\left(1,\ \frac{5}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$E_4\left(\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，

$E_5\left(1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$E_6\left(\frac{5}{3},\ 1,\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$E_7\left(1,\ \frac{5}{3},\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$E_8\left(\frac{1}{3},\ 1,\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$　より

$\overrightarrow{E_1E_2}=\overrightarrow{E_4E_3}=\overrightarrow{E_5E_6}=\overrightarrow{E_8E_7}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right)$，$\overrightarrow{E_1E_4}=\overrightarrow{E_2E_3}=\overrightarrow{E_5E_8}=\overrightarrow{E_6E_7}=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right)$

$\overrightarrow{E_1E_5}=\overrightarrow{E_2E_6}=\overrightarrow{E_3E_7}=\overrightarrow{E_4E_8}=\left(0,\ 0,\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　なので

$|\overrightarrow{E_1E_2}|=|\overrightarrow{E_4E_3}|=|\overrightarrow{E_5E_6}|=|\overrightarrow{E_8E_7}|=|\overrightarrow{E_1E_4}|=|\overrightarrow{E_2E_3}|$

$=|\overrightarrow{E_5E_8}|=|\overrightarrow{E_6E_7}|=|\overrightarrow{E_1E_5}|=|\overrightarrow{E_2E_6}|=|\overrightarrow{E_3E_7}|=|\overrightarrow{E_4E_8}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_5}=\overrightarrow{E_1E_4}\cdot\overrightarrow{E_1E_5}=0$　より　$\overrightarrow{E_1E_2}\perp\overrightarrow{E_1E_4}$　かつ　$\overrightarrow{E_1E_2}\perp\overrightarrow{E_1E_5}$　かつ　$\overrightarrow{E_1E_4}\perp\overrightarrow{E_1E_5}$

よって，求める凸多面体はすべての面が 1 辺の長さが $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ の正方形からなる立体である。

以上より，求める凸多面体は立方体であり，各辺の長さは $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1)

表が出る回数がちょうど6回目の試行で5となるのは，5回目までに表が4回，裏が1回出て，6回目の試行で表が出るときだから，

$$P_6 = {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2} = \frac{5}{64}$$

(2)

表が出る回数がちょうどn回目の試行で5となるのは，$(n-1)$回目までに表が4回，裏が$(n-5)$回出て，n回目の試行で表が出るときだから，

$$P_n = {}_{n-1}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\times\frac{1}{2}$$

$$= {}_{n-1}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot2^{n+3}}$$

(3)

(2)の結果から

$$P_{n+1} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}$$

であるから，

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}\cdot\frac{3\cdot2^{n+3}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$= \frac{n}{2(n-4)}$$

ここで，

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ とすると，

$$\frac{n}{2(n-4)} > 1$$

$$n > 2(n-4)$$

$$n < 8$$

よって，$5 \leqq n < 8$ のとき $P_n < P_{n+1}$ が成り立つ。

同様に考えて，

$n=8$ のとき $P_n = P_{n+1}$

$n>8$ のとき $P_n > P_{n+1}$

が成り立つから，

$$P_5 < P_6 < P_7 < P_8 = P_9 > P_{10} > P_{11} > \cdots\cdots$$

したがって，

$n=8, 9$ のとき P_n は最大値 $\dfrac{35}{256}$ をとる。

氏　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

③

3

(1) $y'=2x$ より直線 l の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$

$$y=2tx-t^2 \quad \cdots(\text{答})$$

(2) l と x 軸の交点の x 座標は

$2tx-t^2=0$ より $x=\dfrac{t}{2}$

よって

$$S_1(t)=\int_0^{\frac{t}{2}} x^2dx+\int_{\frac{t}{2}}^{t}\{x^2-(2tx-t^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{t}{2}}+\int_{\frac{t}{2}}^{t}(x-t)^2dx$$

$$=\frac{1}{24}t^3+\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{\frac{t}{2}}^{t}$$

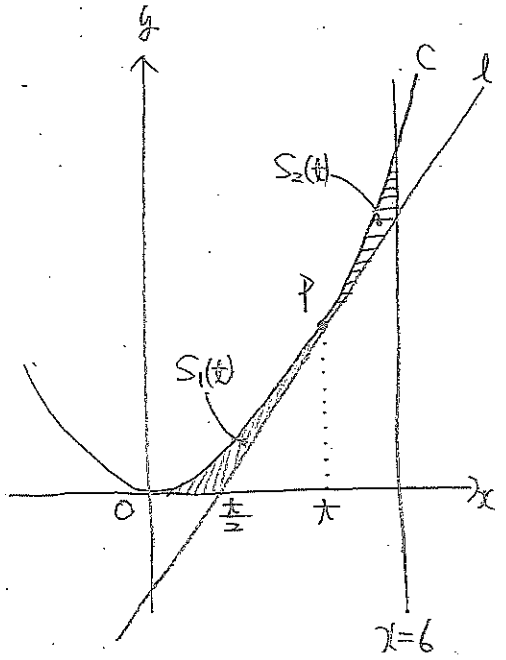
$$=\frac{1}{24}t^3+\frac{1}{24}t^3=\frac{1}{12}t^3$$

$$S_2(t)=\int_t^6\{x^2-(2tx-t^2)\}dx$$

$$=\int_t^6(x-t)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_t^6$$

$$=\frac{1}{3}(6-t)^3$$



$$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$$

$$=\frac{1}{12}t^3+\frac{1}{3}(6-t)^3$$

$$=-\frac{1}{4}t^3+6t^2-36t+72 \quad \cdots(\text{答})$$

(3) $$S'(t)=-\frac{3}{4}t^2+12t-36$$

$$=-\frac{3}{4}(t^2-16t+48)$$

$$=-\frac{3}{4}(t-4)(t-12)$$

$S'(t)=0$ とすると，$2\leqq t\leqq 5$ より $t=4$

t	2		4		5
$S'(t)$		−	0	+	
$S(t)$	22	↘	8	↗	$\frac{43}{4}$

増減表より

$t=2$ のとき 最大値 22
$t=4$ のとき 最小値 8　…(答)

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

数学解答紙〔その四〕

氏名

受験番号

評点欄

4

4

(1) $P(x)=(x-n)(x^2+px+q)$ と表されるとき，これを展開して

$P(x)=x^3+(p-n)x^2+(q-pn)x-nq$ となる。

これと，$P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ の係数を比較することにより

$$\begin{cases} p-n=a & \cdots ① \\ q-pn=b & \cdots ② \\ -nq=2 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より，$p=a+n$ となるが，ここで，a，n は整数であるから，p は整数となる。

② より，$q=b+pn$ となるが，b，p，n は整数であるから，q は整数となる。

よって，③ より，n は 2 の約数となる。

(2) (1) より n は 2 の約数であるから，$n=\pm1$，±2 のいずれかである。したがって，方程式 $P(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，解は ±1，±2 の中の 3 つとなるので，3 つの解の組は $(1,\ 2,\ -1)$，$(1,\ 2,\ -2)$，$(1,\ -1,\ -2)$，$(2,\ -1,\ -2)$ のいずれかとなるが，3 つの解を α，β，γ とおくと，3 次方程式の解と係数の関係により，$\alpha\beta\gamma=-2$ となる。よって，3 つの解の組は $(1,\ 2,\ -1)$ に限られる。

このとき，$P(x)=(x-1)(x-2)(x+1)=x^3-2x^2-x+2$ となるので，

$a=-2$，$b=-1$ となる。

(3) $P(x)=0$ が整数解と実数でない解（虚数解）をもつとき，(1) より

方程式 $x^2+px+q=0$ が虚数解をもつ。

この方程式の判別式を D とおくと，$D<0$ とならなければならない。

(1) の③式により，$n>0$ のとき $q<0$ となり，$D=p^2-4q>0$ となるので，

$n=1$，2 のとき不適。

i) $n=-1$ のとき

$q=2$，$p=a-1$，$b=a+1$ となるので

$D=p^2-4q=(a-1)^2-8<0$ より，これを満たす整数 a は，$a=-1$，0，1，2，3

a，b の組は，$(a,\ b)=(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$ となる。

ii) $n=-2$ のとき

$q=1$，$p=a-2$，$b=2a-3$ となるので

$D=p^2-4q=(a-2)^2-4<0$ より，これを満たす整数 a は，$a=1$，2，3

a，b の組は，$(a,\ b)=(1,\ -1)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 3)$ となる。

以上より

a，b の組は $(a,\ b)=(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 3)$ の 8 組となる。