令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

$\boxed{1}$

1

(1) $D(x,\ y,\ z)$ とする。

$OD^2=x^2+y^2+z^2=4$, $AD^2=(x-2)^2+y^2+z^2=4$,

$BD^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=4$, $CD^2=x^2+(y-2)^2+z^2=4$　であり

これを解くと　$x=1$, $y=1$, $z=\pm\sqrt{2}$　よって　$D_1(1,\ 1,\ \sqrt{2})$, $D_2(1,\ 1,\ -\sqrt{2})$

(2) $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP}=a(2,\ 0,\ 0)+b(1,\ 1,\ \sqrt{2})-(1,\ 1,\ 0)=(2a+b-1,\ b-1,\ \sqrt{2}b)$

$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{OA}$　より　$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OA}=0$　なので

$(2a+b-1)\cdot 2+(b-1)\cdot 0+\sqrt{2}b\cdot 0=0$　よって　$2a+b-1=0$

また，$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{OD_1}$　より　$(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OD_1}=0$　なので

$(2a+b-1)\cdot 1+(b-1)\cdot 1+\sqrt{2}b\cdot\sqrt{2}=0$　よって　$a+2b-1=0$

これを解くと，$a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$

(3) (2)の点Pは正八面体Vの中心なので，球Sの中心となる。

ここで，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD_1}$ とすると，点Eは平面OAD_1上の点であり，(2)より$\overrightarrow{PE}\perp$(平面OAD_1)なので

点Eは正八面体Vと球Sの接点である。

よって，求める球Sの半径は$|\overrightarrow{PE}|$であり

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}(2,\ 0,\ 0)+\dfrac{1}{3}(1,\ 1,\ \sqrt{2})=\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ より $\overrightarrow{PE}=\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)-(1,\ 1,\ 0)=\left(0,\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

なので，半径は　$\sqrt{0^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

また，Vの各面$\triangle D_1OA$, $\triangle D_1AB$, $\triangle D_1BC$, $\triangle D_1CO$, $\triangle D_2OA$, $\triangle D_2AB$, $\triangle D_2BC$, $\triangle D_2CO$と球Sとの接点を順にE_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8とするとこの8点はそれぞれの三角形の重心となるので

$E_1\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_2\left(\dfrac{5}{3},\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_3\left(1,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_4\left(\dfrac{1}{3},\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$,

$E_5\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_6\left(\dfrac{5}{3},\ 1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_7\left(1,\ \dfrac{5}{3},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $E_8\left(\dfrac{1}{3},\ 1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$　より

$\overrightarrow{E_1E_2}=\overrightarrow{E_4E_3}=\overrightarrow{E_5E_6}=\overrightarrow{E_8E_7}=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 0\right)$, $\overrightarrow{E_1E_4}=\overrightarrow{E_2E_3}=\overrightarrow{E_5E_8}=\overrightarrow{E_6E_7}=\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 0\right)$

$\overrightarrow{E_1E_5}=\overrightarrow{E_2E_6}=\overrightarrow{E_3E_7}=\overrightarrow{E_4E_8}=\left(0,\ 0,\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　なので

$|\overrightarrow{E_1E_2}|=|\overrightarrow{E_4E_3}|=|\overrightarrow{E_5E_6}|=|\overrightarrow{E_8E_7}|=|\overrightarrow{E_1E_4}|=|\overrightarrow{E_2E_3}|$

$=|\overrightarrow{E_5E_8}|=|\overrightarrow{E_6E_7}|=|\overrightarrow{E_1E_5}|=|\overrightarrow{E_2E_6}|=|\overrightarrow{E_3E_7}|=|\overrightarrow{E_4E_8}|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_5}=\overrightarrow{E_1E_4}\cdot\overrightarrow{E_1E_5}=0$　より　$\overrightarrow{E_1E_2}\perp\overrightarrow{E_1E_4}$　かつ　$\overrightarrow{E_1E_2}\perp\overrightarrow{E_1E_5}$　かつ　$\overrightarrow{E_1E_4}\perp\overrightarrow{E_1E_5}$

よって，求める凸多面体はすべての面が１辺の長さが$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$の正方形からなる立体である。

以上より，求める凸多面体は立方体であり，各辺の長さは$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$である。

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1)

表が出る回数がちょうど6回目の試行で5となるのは，5回目までに表が4回，裏が1回出て，6回目の試行で表が出るときだから，

$$P_6 = {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2} = \frac{5}{64}$$

(2)

表が出る回数がちょうどn回目の試行で5となるのは，$(n-1)$回目までに表が4回，裏が$(n-5)$回出て，n回目の試行で表が出るときだから，

$$P_n = {}_{n-1}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\times\frac{1}{2}$$

$$= {}_{n-1}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot2^{n+3}}$$

(3)

(2)の結果から

$$P_{n+1} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}$$

であるから，

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}\cdot\frac{3\cdot2^{n+3}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$= \frac{n}{2(n-4)}$$

ここで，

$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ とすると，

$$\frac{n}{2(n-4)} > 1$$

$$n > 2(n-4)$$

$$n < 8$$

よって，$5 \leqq n < 8$ のとき $P_n < P_{n+1}$ が成り立つ。

同様に考えて，

$n = 8$ のとき $P_n = P_{n+1}$

$n > 8$ のとき $P_n > P_{n+1}$

が成り立つから，

$$P_5 < P_6 < P_7 < P_8 = P_9 > P_{10} > P_{11} > \cdots\cdots$$

したがって，

$n = 8, 9$ のとき P_n は最大値 $\frac{35}{256}$ をとる。

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄 3

3

(1).

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = (4x^2-2) \cdot e^{-x^2}$

$f''(a) = (4a^2-2) \cdot e^{-a^2} = 0$ より. $a^2 = \frac{1}{2}$

$a>0$ より. $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f'(x) = 0$ とすると. $x=0$.

$f''(x) = 0$ とすると. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

関数 $f(x)$ の増減,凹凸は次の表のようになる.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	⤴	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↱	1	⤵	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↳

よって. $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < x$ で 下に凸.

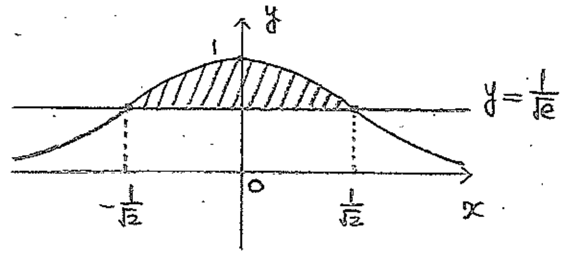
$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ で 上に凸.

変曲点は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

(2). (1)より. 曲線 $y=f(x)$ と

直線 $y=f(a)=\frac{1}{\sqrt{e}}$ で囲まれた

図形は. 次の図の斜線部分である.



$y = e^{-x^2}$ を変形して.

$\log y = -x^2$

$x^2 = -\log y$

よって 求める体積を V とすると.

$$V = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} \pi x^2 \, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} \pi \cdot (-\log y) \, dy$$

$$= -\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} (y)' \cdot \log y \, dy$$

$$= -\pi \left(\left[y \cdot \log y \right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} - \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} dy \right)$$

$$= -\pi \left[y \cdot \log y - y \right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}$$

$$= -\pi \left\{ (-1) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \log \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \right\}$$

$$= \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)\pi$$

令和４年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その四〕

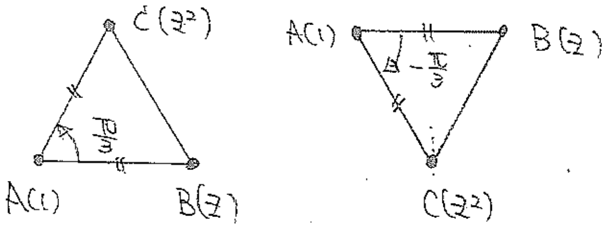
受験番号

評点欄 ④

4

(1). 3点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ は
いずれも異なる点なので、

$1\neq z$, $z\neq z^2$, $1\neq z^2$ より　$z\neq 0, \pm 1$.



点 A, B, C が正三角形となるとき。

$\overrightarrow{AB}$ を $\pm\frac{\pi}{3}$ 回転させたベクトルが $\overrightarrow{AC}$ となるので、

$$\frac{z^2-1}{z-1} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z+1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2). i) $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ のとき。

$\frac{z^2-1}{z-1} = z+1$ が純虚数となるので、

$$(z+1)+\overline{(z+1)} = 0$$

$$\therefore\ z+\bar{z} = -2 \cdots ①$$

ii) $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ のとき。

$\frac{z^2-z}{1-z} = -z$ が純虚数となるので。

$$-z+\overline{(-z)} = 0$$

$$\therefore\ z+\bar{z} = 0 \cdots ②$$

iii) $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ のとき

$\frac{z-z^2}{1-z^2} = \frac{z}{1+z}$ が純虚数となるので、

$$\frac{z}{1+z} + \overline{\left(\frac{z}{1+z}\right)} = 0$$

$$z(1+\bar{z}) + \bar{z}(1+z) = 0$$

$$2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$$

$$z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0$$

$$\left|z+\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdots ③$$

したがって、求める条件は ①, ②, ③ より

$z+\bar{z} = -2$ または $z+\bar{z} = 0$ または $\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

ただし、$z\neq 0, \pm 1$.

また、$z = x+yi$ とおくと、

①は $z+\bar{z} = x+yi+\overline{(x+yi)} = -2$
$x = -1$

②は $z+\bar{z} = x+yi+\overline{(x+yi)} = 0$
$x = 0$

③は点 $-\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円。

図は下図の実線部分。ただし点0、点−1を除く。