令和5年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その1〕

受験番号

評点欄

①

1

(1)　中心の座標は線分ABの中点$\left(\dfrac{a+1}{2},\ 0\right)$であり，半径は線分ABの長さの半分$\dfrac{1-a}{2}$であるから，求める円$C$の方程式は

$$\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \qquad \text{よって} \qquad x^2-(a+1)x+y^2+a=0 \quad \cdots \text{答}$$

(2)　接線の方程式を$y=mx$ ……① とおく。① を円の方程式に代入して

$$x^2-(a+1)x+m^2x^2+a=0 \qquad \text{整理して} \qquad (m^2+1)x^2-(a+1)x+a=0 \ \cdots\cdots ②$$

このxの2次方程式の判別式をDとすると

$$D=(a+1)^2-4(m^2+1)a$$

直線 ① が円に接するから，$D=0$が成り立つ。

よって$(a+1)^2-4(m^2+1)a=0$　ゆえに　$m^2+1=\dfrac{(a+1)^2}{4a}$ ……③

このとき，点Pのx座標は ② の重解であるから　$x=\dfrac{a+1}{2(m^2+1)}=\dfrac{2a}{a+1}$

また，③ より　$m^2=\dfrac{(a+1)^2}{4a}-1=\dfrac{(a-1)^2}{4a}$ となり，$0<a<1$ および $m>0$ なので

$$m=\frac{1-a}{2\sqrt{a}}$$

よって点Pのy座標は ① より　$y=mx=\dfrac{(1-a)\sqrt{a}}{a+1}$

以上より点Pの座標は$\left(\dfrac{2a}{a+1},\ \dfrac{(1-a)\sqrt{a}}{a+1}\right)$　…答

(3)　$\angle \mathrm{AOP}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，接線の傾きmが$\sqrt{3}$となるので，

④ より　$\dfrac{1-a}{2\sqrt{a}}=\sqrt{3}$

$1-a=2\sqrt{3a}$　2乗して　$1-2a+a^2=12a$　整理して　$a^2-14a+1=0$

$0<a<1$ より　$a=7-4\sqrt{3}$　…答

氏　名

数学解答紙〔その２〕

受験番号

評点欄

2

2

(1) $AC=\sqrt{(\sqrt{2-a})^2+(\sqrt{a})^2}=\sqrt{2}$，$AF=\sqrt{(\sqrt{2-a})^2+2^2}=\sqrt{6-a}$，

$CF=\sqrt{(\sqrt{a})^2+2^2}=\sqrt{a+4}$　なので，△AFCで余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{AF^2+CF^2-AC^2}{2\cdot AF\cdot CF}=\frac{(\sqrt{6-a})^2+(\sqrt{a+4})^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{6-a}\cdot\sqrt{a+4}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(6-a)(a+4)}}$$ …答

(2) $0<a<2$ のとき，(1)の結果より $\cos\theta>0$ なので，θ は鋭角である。

ここで，$a=1$ のとき，(1)より，$AF=\sqrt{5}$，$CF=\sqrt{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$ であり

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

よって　$S=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot CF\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$　…答

(3) $S=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(AC+AF+CF)$　より　$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{5})$

よって　$r=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{6}$　…答

また，△AFCで正弦定理より　$\frac{AC}{\sin\theta}=2R$

よって　$R=\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\frac{3}{5}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$　…答

(4) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$　なので　$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\frac{16}{(6-a)(a+4)}}$

整理すると　$\tan^2\theta=\frac{-a^2+2a+8}{16}$　であり，θ は鋭角なので

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{-a^2+2a+8}}{4}$$

また，$f(a)=-a^2+2a+8$ とおくと　$f(a)=-(a-1)^2+9$

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{4}{3}$ のとき　$\frac{35}{4}\leqq f(a)\leqq 9$　よって　$\frac{\sqrt{35}}{8}\leqq\frac{\sqrt{f(a)}}{4}\leqq\frac{3}{4}$

以上より　$\frac{\sqrt{35}}{8}\leqq\tan\theta\leqq\frac{3}{4}$　…答

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その３〕

受験番号

評点欄

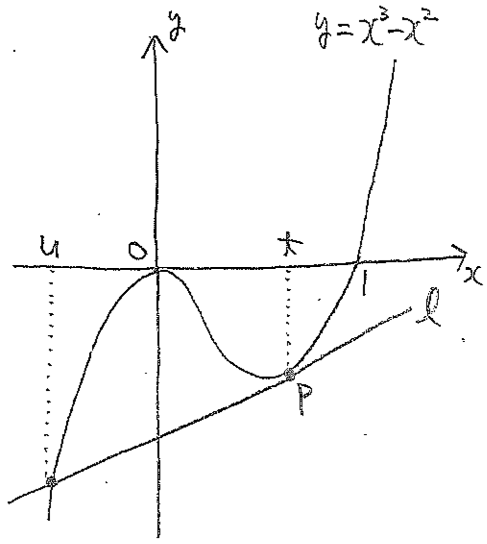
3

3

(1) $y'=3x^2-2x$ より，直線 l の方程式は

$$y-(t^3-t^2)=(3t^2-2t)(x-t)$$

$$y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2$$



ここで，$x^3-x^2=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2$ とし，これを整理すると，

$$x^3-x^2-(3t^2-2t)x+2t^3-t^2=0$$

$$(x-t)^2(x+2t-1)=0$$

$$x=t,\ -2t+1$$

$t\neq\frac{1}{3}$ のとき，$t\neq-2t+1$ であり，求める点は P とは異なる点なので，

$$u=-2t+1$$

(2) (1)の結果より，$a_{n+1}=-2a_n+1$

これを変形し，$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-2\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，公比 -2 の等比数列なので，

$$a_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot(-2)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{2}{3}\cdot(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その４〕

受験番号

評点欄

4

4

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　より　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ は $x=2$ で極値をとるので　$f'(2)=0$　よって　$4a+b=-12$　…①

また，$f(1-i)=0$ なので　$(1-i)^3+a(1-i)^2+b(1-i)+c=0$

これを整理して　$b+c-2+(-2a-b-2)i=0$

a，b，c は実数なので　$b+c-2=0$　…②　かつ　$-2a-b-2=0$　…③

①，②，③を解くと　$a=-5$，$b=8$，$c=-6$

このとき，$f(x)=x^3-5x^2+8x-6$ であり，$f'(x)=3x^2-10x+8=(3x-4)(x-2)$

よって，$f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{50}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

増減表より，確かに $f(x)$ は $x=2$ で極値をとる。

以上より　$a=-5$，$b=8$，$c=-6$　…答

(2)　(1)の増減表より　極大値 $f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{50}{27}$，極小値 $f(2)=-2$　…答

(3)　$\int_1^2|f'(x)|dx=\int_1^{\frac{4}{3}}f'(x)dx+\int_{\frac{4}{3}}^2\{-f'(x)\}dx$

$$=\Big[f(x)\Big]_1^{\frac{4}{3}}+\Big[-f(x)\Big]_{\frac{4}{3}}^2$$

$$=2f\left(\frac{4}{3}\right)-f(1)-f(2)$$

$$=2\times\left(-\frac{50}{27}\right)-(-2)-(-2)$$

$$=\frac{8}{27}$$　…答