令和５年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1)　中心の座標は線分 AB の中点 $\left(\dfrac{a+1}{2},\ 0\right)$ であり，半径は線分 AB の長さの半分 $\dfrac{1-a}{2}$ であるから，求める円 C の方程式は

$$\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \qquad \text{よって} \qquad x^2-(a+1)x+y^2+a=0 \qquad \cdots\text{答}$$

(2)　接線の方程式を $y=mx$ ……① とおく。① を円の方程式に代入して

$x^2-(a+1)x+m^2x^2+a=0$　　整理して　　$(m^2+1)x^2-(a+1)x+a=0$ ……②

この x の２次方程式の判別式を D とすると

$D=(a+1)^2-4(m^2+1)a$

直線 ① が円に接するから，$D=0$ が成り立つ。

よって $(a+1)^2-4(m^2+1)a=0$　ゆえに　$m^2+1=\dfrac{(a+1)^2}{4a}$ ……③

このとき，点 P の x 座標は ② の重解であるから　$x=\dfrac{a+1}{2(m^2+1)}=\dfrac{2a}{a+1}$

また，③ より　$m^2=\dfrac{(a+1)^2}{4a}-1=\dfrac{(a-1)^2}{4a}$ となり，$0<a<1$ および $m>0$ なので

$$m=\frac{1-a}{2\sqrt{a}}$$

よって点 P の y 座標は ① より　$y=mx=\dfrac{(1-a)\sqrt{a}}{a+1}$

以上より点 P の座標は $\left(\dfrac{2a}{a+1},\ \dfrac{(1-a)\sqrt{a}}{a+1}\right)$　　…答

(3)　$\sqrt{a}=t$ とおくと，(2) より　$y=\dfrac{(1-t^2)t}{t^2+1}$ $(0<t<1)$　となり　$f(t)=\dfrac{(1-t^2)t}{t^2+1}$ とおく。

$$f'(t)=\frac{(1-3t^2)(t^2+1)-(1-t^2)t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-t^4-4t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

$f'(t)=0$ とすると，$-t^4-4t^2+1=0$　$\therefore$　$t^2=-2+\sqrt{5}$　$(\because 0<t<1)$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\sqrt{-2+\sqrt{5}}$	$\cdots$	1
f'	/	$+$	0	$-$	/
f	/	$\nearrow$		$\searrow$	/

よって $f(t)$ は $t^2=-2+\sqrt{5}$ つまり $a=-2+\sqrt{5}$ のとき最大となる。

以上より，点 P の y 座標が最大となるような a の値は $-2+\sqrt{5}$　　…答

氏　名

数学解答紙〔その2〕

受験番号

評点欄

2

2

(1) $\mathrm{AC}=\sqrt{(\sqrt{2-a})^2+(\sqrt{a})^2}=\sqrt{2}$, $\mathrm{AF}=\sqrt{(\sqrt{2-a})^2+2^2}=\sqrt{6-a}$,

$\mathrm{CF}=\sqrt{(\sqrt{a})^2+2^2}=\sqrt{a+4}$　なので，$\triangle\mathrm{AFC}$で余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{CF}^2-\mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}=\frac{(\sqrt{6-a})^2+(\sqrt{a+4})^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{6-a}\cdot\sqrt{a+4}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(6-a)(a+4)}}\quad\cdots\text{答}$$

(2) $0<a<2$ のとき，(1)の結果より $\cos\theta>0$ なので，θ は鋭角である。

ここで，$a=1$ のとき，(1)より，$\mathrm{AF}=\sqrt{5}$，$\mathrm{CF}=\sqrt{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ であり

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{2}$　…答

(3) $S=\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot(\mathrm{AC}+\mathrm{AF}+\mathrm{CF})$　より　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{5})$

よって　$r=\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{6}$　…答

また，$\triangle\mathrm{AFC}$で正弦定理より　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\theta}=2R$

よって　$R=\dfrac{\sqrt{2}}{2\cdot\frac{3}{5}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$　…答

(4) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　なので　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\frac{16}{(6-a)(a+4)}}$

整理すると　$\tan^2\theta=\dfrac{-a^2+2a+8}{16}$　であり，θ は鋭角なので

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{-a^2+2a+8}}{4}$$

また，$f(a)=-a^2+2a+8$ とおくと　$f(a)=-(a-1)^2+9$

$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{4}{3}$ のとき　$\dfrac{35}{4}\leqq f(a)\leqq 9$　よって　$\dfrac{\sqrt{35}}{8}\leqq\dfrac{\sqrt{f(a)}}{4}\leqq\dfrac{3}{4}$

以上より　$\dfrac{\sqrt{35}}{8}\leqq\tan\theta\leqq\dfrac{3}{4}$　…答

令和５年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その３〕

受験番号

評点欄

3

3

(1). $z=1$ のとき，

$$w=\frac{1-2i}{1+2i}=\frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

∴ wの実部：$-\frac{3}{5}$，虚部：$-\frac{4}{5}$ //

(2). $w=\frac{z-2i}{1+2iz}$ の両辺に $1+2iz$ を掛けて，zについて~~整理~~すると，

$(1-2iw)z=w+2i$ …①．

$w=-\frac{i}{2}$ のとき，①は成り立たないので，　$z=\frac{w+2i}{1-2iw}$ //

また，

$$\overline{z}=\overline{\left(\frac{w+2i}{1-2iw}\right)}=\frac{\overline{w}-2i}{1+2i\overline{w}}$$ //

(3). $|z|=1$ より，$|z|^2=z\cdot\overline{z}=1$ であるから，

$\frac{w+2i}{1-2iw}\cdot\frac{\overline{w}-2i}{1+2i\overline{w}}=1$ の両辺に $(1-2iw)(1+2i\overline{w})$ を掛けて，

$(w+2i)(\overline{w}-2i)=(1-2iw)(1+2i\overline{w})$

展開して~~整理~~すると　$w\cdot\overline{w}=1$．

$|w|^2=1$．

$|w|\geqq 0$ より，$|w|=1$．

これは，$w\neq -\frac{i}{2}$ をみたす．

∴ 点wは，原点を中心とする半径１の円をえがく． //

令和５年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数 学 解 答 紙 〔その４〕

受験番号

評点欄

④

4

(1). $f(x) = g(x)$ より

$$2e^{-2x} = e^{-x}$$

$$e^{-2x}(2 - e^{x}) = 0$$

$e^{-2x} > 0$ より　$e^{x} = 2$.

$$x = \log 2 \quad //$$

(2).

$$h(x) = \int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt$$

$$= \int_0^x 2e^{-2(x-t)} e^{-t}\,dt$$

$$= 2e^{-2x}\int_0^x e^{t}\,dt$$

$$= 2e^{-2x}\left[e^{t}\right]_0^x$$

$$= 2e^{-2x}(e^{x} - e^{0})$$

$$= 2(e^{-x} - e^{-2x}) \quad //$$

$$h'(x) = 2(-e^{-x} - e^{-2x}(-2))$$

$$= 2e^{-2x}(2 - e^{x})$$

x	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

増減表より　極大値 $\frac{1}{2}$ $(x = \log 2)$

極小値なし　//

(3).

$h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{x}} - \frac{1}{e^{2x}}\right)$ より

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0 \quad //$$

$x = -l$ とおくと. $x \to -\infty$ のとき.

$l \to \infty$ である.

このとき.

$$h(x) = 2(e^{l} - e^{2l})$$

$= 2e^{2l}\left(\frac{1}{e^{l}} - 1\right)$ なので.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \quad //$$