氏　名

数学解答紙〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=8$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=6$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=4$

(2) $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ 　より　 $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

したがって　 $\overrightarrow{OH}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

(3) $\mathrm{OH}\perp$(平面 ABC)　なので　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ 　より　 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　 $\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s-t)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$2s+t=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ 　より　 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって　 $\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{c}-(1-s-t)|\vec{a}|^2+s\vec{b}\cdot\vec{c}-s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{c}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$8s+12t=7 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② を解くと　 $s=\dfrac{5}{16},\ t=\dfrac{3}{8}$

(4) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{8\cdot6-4^2}=2\sqrt{2}$

また, (3) より　 $\overrightarrow{OH}=\dfrac{5}{16}\vec{a}+\dfrac{5}{16}\vec{b}+\dfrac{3}{8}\vec{c}$ 　なので

$$|\overrightarrow{OH}|^2=\left|\frac{5}{16}\vec{a}+\frac{5}{16}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}\right|^2=\left(\frac{1}{16}\right)^2|5\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}|^2$$

$$=\left(\frac{1}{16}\right)^2(25|\vec{a}|^2+25|\vec{b}|^2+36|\vec{c}|^2+50\vec{a}\cdot\vec{b}+60\vec{b}\cdot\vec{c}+60\vec{a}\cdot\vec{c})=\left(\frac{1}{16}\right)^2\cdot4^2\cdot23=\frac{23}{16}$$

$|\overrightarrow{OH}|>0$ 　なので　 $|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{\sqrt{23}}{4}$

したがって　 $V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{1}{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{23}}{4}=\dfrac{\sqrt{46}}{6}$

氏　名

数学解答紙〔その２〕

受験番号

2

評点欄

2

(1)　１回目，２回目に取り出したカードの数字をそれぞれ a，b とおく。

S_2 が３で割り切れるのは，以下の場合である。

$(a,\ b)=(0,\ 0),\ (0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0),\ (3,\ 3)$

よって　$p_2=6\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$

S_2 を３で割ると１余るのは以下の場合である。

$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

よって　$q_2=5\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{16}$

(2)　S_{n+1} が３で割り切れるのは以下の場合である。

(i)　S_n が３で割り切れ，$(n+1)$ 回目に０または３が書かれたカードを取り出す

(ii)　S_n が３で割ると１余り，$(n+1)$ 回目に２が書かれたカードを取り出す

(iii)　S_n が３で割ると２余り，$(n+1)$ 回目に１が書かれたカードを取り出す

よって　$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{4}q_n+\dfrac{1}{4}(1-p_n-q_n)=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{4}$　……①

また，S_{n+1} を３で割ると１余るのは以下の場合である。

(i)　S_n が３で割り切れ，$(n+1)$ 回目に１が書かれたカードを取り出す

(ii)　S_n が３で割ると１余り，$(n+1)$ 回目に０または３が書かれたカードを取り出す

(iii)　S_n が３で割ると２余り，$(n+1)$ 回目に２が書かれたカードを取り出す

よって　$q_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{4}(1-p_n-q_n)=\dfrac{1}{4}q_n+\dfrac{1}{4}$　……②

(3)　①を変形して　$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$　よって　$p_n-\dfrac{1}{3}=\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

したがって　$p_n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left\{1+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$

②を変形して　$q_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left(q_n-\dfrac{1}{3}\right)$　よって　$q_n-\dfrac{1}{3}=\left(q_1-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

したがって　$q_n=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\frac{1}{3}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\frac{1}{3}$

氏　　名

数　学　解　答　紙　〔その３〕

受験番号

評点欄

3

3

(1)　$f(x)=0$ が $x=\sqrt{6}$，$x=-\sqrt{6}$ を解にもつので $f(x)$ は $x-\sqrt{6}$，$x+\sqrt{6}$ を因数にもつ。よって，$f(x)$ は $(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=x^2-6$ で割り切れる。

(2)　$f(x)$ は x^2-6 で割り切れるので，割り算を行い

$$
\begin{array}{r}
x^2+ax+(b+6) \\
x^2-6\,\big)\,\overline{x^4+ax^3+bx^2+cx+d} \\
x^4\qquad -6x^2 \\
\hline
ax^3+(b+6)x^2+cx \\
ax^3\qquad -6ax \\
\hline
(b+6)x^2+(c+6a)x+d \\
(b+6)x^2\qquad -6b-36 \\
\hline
(c+6a)x+d+6b+36
\end{array}
$$

余りが0となるので，$c+6a=0$，$d+6b+36=0$

$\therefore$　$c=-6a$，$d=-6b-36$

このとき，$f(x)$ は $f(x)=(x^2-6)(x^2+ax+b+6)$ と因数分解できるので，

α，β は $x^2+ax+b+6=0$ の解である。よって，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b+6$

(3)　α，β は実数係数の2次方程式の虚数解なので互いに共役である。つまり，A，Bは実軸に関して対称な位置にある。よって，A，B，Cが同一直線上にあるとき，α，β の実部はともに $-\sqrt{6}$ である。これより $\alpha+\beta=-2\sqrt{6}$

よって，(2)の結果より　$a=2\sqrt{6}$　となる。

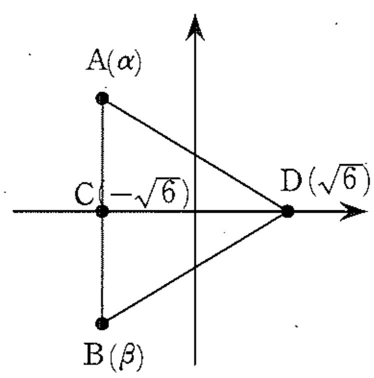
(4)　三角形ABDが正三角形になるとき，

右図よりA，Bの虚部は $2\sqrt{2}$ となるので

(α の虚部)>0 とすると，

$\alpha=-\sqrt{6}+2\sqrt{2}\,i$，$\beta=-\sqrt{6}-2\sqrt{2}\,i$ となる。

よって　$b=\alpha\beta-6=14-6=8$



氏　名

数学解答紙〔その４〕

受験番号

評点欄

4

4

(1). $(\tan\theta)' = \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)'$

$$= \frac{\cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって. $(\tan\theta)' = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ が示せた。

これより. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$= \underline{1}$$

(2). $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$$= \frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2}{\cos\theta}$$

よって. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}$ が示せた。

これより. $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin\theta| - \log|1-\sin\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| - \log 1\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\log 3}$$

(3).

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$ とすると.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \left[\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)\cdot\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3} - I + \frac{1}{2}\log 3 \quad (\because (2)より)$$

$$2I = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\log 3$$

$$\therefore\ I = \underline{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\log 3}$$