氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その１〕

受験番号

評点欄

1

1

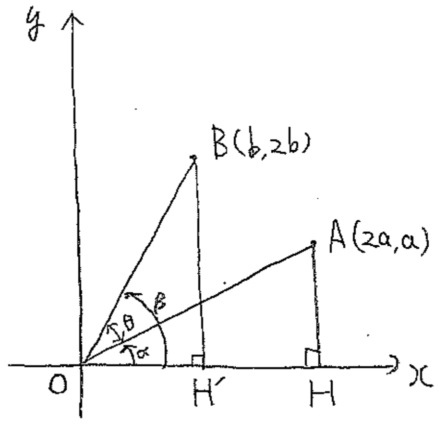
(1) 2点A, Bよりx軸に垂線を下ろし、x軸との交点をそれぞれH, H′とおく。

$OA=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$ （$\because a>0$）

$OB=\sqrt{b^2+(2b)^2}=\sqrt{5}b$ （$\because b>0$）

2つの直角三角形OAH, OBH′に注目して

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ //



(2) (1)と同様に考え $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

よって $\sin\theta=\sin(\beta-\alpha)$

$=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

$=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

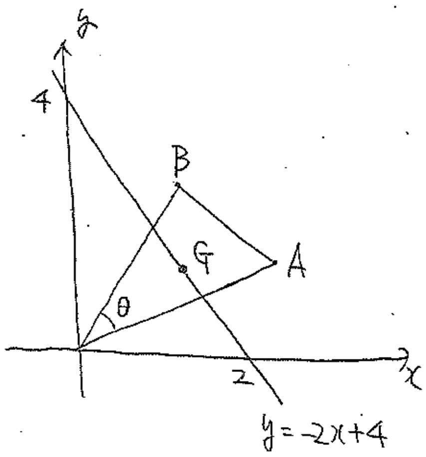
$=\dfrac{3}{5}$ //

(3) △OABの重心をGとすると、G$\left(\dfrac{2a+b}{3}, \dfrac{a+2b}{3}\right)$

この重心が直線$y=-2x+4$上にあるので、

$$\frac{a+2b}{3}=-2\cdot\frac{2a+b}{3}+4$$

これを整理して　$b=3-\dfrac{5}{4}a$ //



また $b>0$ より　$3-\dfrac{5}{4}a>0$

$a<\dfrac{12}{5}$

これと $a>0$ より　$0<a<\dfrac{12}{5}$ //

(4) $S=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\sin\theta=\dfrac{3}{2}ab$

$=\dfrac{3}{2}a\left(3-\dfrac{5}{4}a\right)$

$=-\dfrac{15}{8}a^2+\dfrac{9}{2}a$

$=-\dfrac{15}{8}\left(a-\dfrac{6}{5}\right)^2+\dfrac{27}{10}$

$0<a<\dfrac{12}{5}$ において、

$a=\dfrac{6}{5}$ のときに、Sは最大値 $\dfrac{27}{10}$ をとる。//

氏　名

数学解答紙〔その２〕

受験番号

評点欄

2

2

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=8$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=6$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=4$

(2) $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　より　$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

したがって　$\overrightarrow{OH}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

(3) OH⊥(平面ABC)　なので　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　より　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s-t)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$2s+t=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$　より　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって　$\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{c}-(1-s-t)|\vec{a}|^2+s\vec{b}\cdot\vec{c}-s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{c}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$8s+12t=7 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②を解くと　$s=\dfrac{5}{16}$，$t=\dfrac{3}{8}$

(4) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{8\cdot6-4^2}=2\sqrt{2}$

また，(3)より　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{5}{16}\vec{a}+\dfrac{5}{16}\vec{b}+\dfrac{3}{8}\vec{c}$　なので

$$|\overrightarrow{OH}|^2=\left|\frac{5}{16}\vec{a}+\frac{5}{16}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}\right|^2=\left(\frac{1}{16}\right)^2|5\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}|^2$$

$$=\left(\frac{1}{16}\right)^2(25|\vec{a}|^2+25|\vec{b}|^2+36|\vec{c}|^2+50\vec{a}\cdot\vec{b}+60\vec{b}\cdot\vec{c}+60\vec{a}\cdot\vec{c})=\left(\frac{1}{16}\right)^2\cdot4^2\cdot23=\frac{23}{16}$$

$|\overrightarrow{OH}|>0$　なので　$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{\sqrt{23}}{4}$

したがって　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{1}{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{23}}{4}=\dfrac{\sqrt{46}}{6}$

氏　名

数学解答紙〔その３〕

受験番号

評点欄

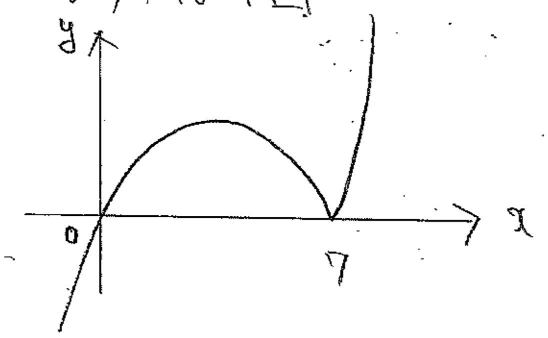
3

3

(1). $f(x) = x|x-7|$

$$= \begin{cases} x(x-7) & (x \geqq 7) \\ -x(x-7) & (x \leqq 7) \end{cases}$$

よって グラフは下図



点P$(3, f(3)) = (3, 12)$ における接線は、

$x \leqq 7$ より $f'(x) = -2x+7$　よって傾き $f'(3) = 1$

$\therefore$ l: $y = x+9$

(2). $x \geqq 7$ において

$x(x-7) = x+9$

$x^2 - 8x - 9 = 0$

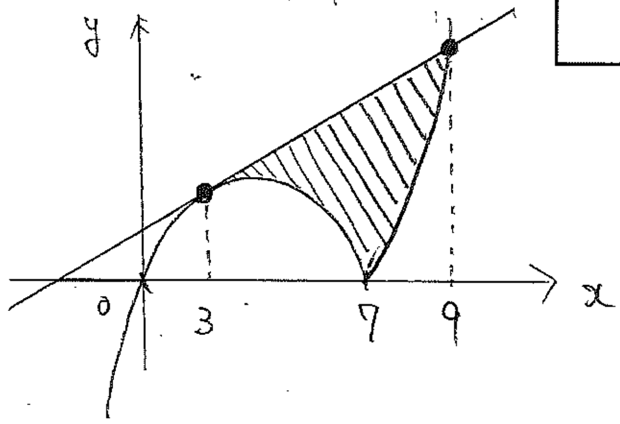
$(x-9)(x+1) = 0$

$x = 9, -1$

$x \geqq 7$ より 交点 $(9, 18)$

(3). 求める面積Sは

下図の斜線部分である。



$$S = \int_3^7 \{x+9-(-x^2+7x)\}dx + \int_7^9 \{x+9-(x^2-7x)\}dx$$

$$= \int_3^7 (x-3)^2 dx + \int_7^9 (-x^2+8x+9)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_3^7 + \left[-\frac{1}{3}x^3+4x^2+9x\right]_7^9$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{3}(9^3-7^3) + 4(9^2-7^2) + 9(9-7)$$

$$= \frac{64}{3} + \frac{52}{3}$$

$$= \frac{116}{3}$$

氏　　名

数 学 解 答 紙 〔その４〕

受験番号

評点欄

4

(1) １回目，２回目に取り出したカードの数字をそれぞれ a，b とおく。

S_2 が３で割り切れるのは，以下の場合である。

$(a,\ b)=(0,\ 0),\ (0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0),\ (3,\ 3)$

よって　$p_2=6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

S_2 を３で割ると１余るのは以下の場合である。

$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

よって　$q_2=5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$

(2) S_{n+1} が３で割り切れるのは以下の場合である。

(ⅰ) S_n が３で割り切れ，$(n+1)$ 回目に０または３が書かれたカードを取り出す

(ⅱ) S_n が３で割ると１余り，$(n+1)$ 回目に２が書かれたカードを取り出す

(ⅲ) S_n が３で割ると２余り，$(n+1)$ 回目に１が書かれたカードを取り出す

よって　$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{4}$　……①

また，S_{n+1} を３で割ると１余るのは以下の場合である。

(ⅰ) S_n が３で割り切れ，$(n+1)$ 回目に１が書かれたカードを取り出す

(ⅱ) S_n が３で割ると１余り，$(n+1)$ 回目に０または３が書かれたカードを取り出す

(ⅲ) S_n が３で割ると２余り，$(n+1)$ 回目に２が書かれたカードを取り出す

よって　$q_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}$　……②

(3) ①を変形して　$p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$　よって　$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$p_1=\frac{1}{2}$ より　$p_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

②を変形して　$q_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(q_n-\frac{1}{3}\right)$　よって　$q_n-\frac{1}{3}=\left(q_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$q_1=\frac{1}{4}$ より　$q_n=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$