

前期日程

令和5年度入学試験問題（前期日程）

数 学

（理工学部）

————— 解答上の注意事項 —————

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
2. 問題冊子1冊および解答紙4枚がある。解答紙は1枚ずつ切り離して使用すること。
3. 問題は **1** から **4** まで4問ある。各問の解答は所定の解答紙にのみ記入すること。
4. 解答は、できるだけ解答紙の表面にすべて書くこと。やむを得ず解答紙の裏面を使う場合は、表面の右下に「裏面に続く」と書き、解答の続きを裏面の仕切り線の下に記入すること。
5. 解答しない問題がある場合でも、解答紙4枚すべてを提出すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

1 四面体 OABC において、 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} とおく。これらは

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = \sqrt{3}$$

および

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

を満たすとする。頂点 O から $\triangle ABC$ を含む平面に垂線を引き、交点を H とする。次の問に答えよ。

- (1) $|\overrightarrow{AB}|^2$, $|\overrightarrow{AC}|^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 実数 s, t により \overrightarrow{AH} が $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ と表されるとき、 \overrightarrow{OH} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , s, t を用いて表せ。
- (3) (2) の s, t の値をそれぞれ求めよ。
- (4) 四面体 OABC の体積を求めよ。

2 0 から 3 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚のカードを取り出し、数字を確認してからもとへもどす。これを n 回くり返したとき、取り出されたカードの数字の総和を S_n で表す。 S_n が 3 で割り切れる確率を p_n とし、 S_n を 3 で割ると 1 余る確率を q_n とするとき、次の問に答えよ。

(1) p_2 および q_2 の値を求めよ。

(2) p_{n+1} および q_{n+1} を p_n, q_n を用いて表せ。

(3) p_n および q_n を n を用いて表せ。また、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

3 a, b, c, d は実数とし, $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $f(x)$ とおく。4次方程式 $f(x) = 0$ が2つの実数解 $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$ および2つの虚数解 α, β を持つとする。次の問に答えよ。

- (1) 整式 $f(x)$ は $x^2 - 6$ で割り切れることを示せ。
- (2) $\alpha + \beta, \alpha\beta, c, d$ を a, b を用いて表せ。
- (3) 複素数平面上において点 $A(\alpha), B(\beta), C(-\sqrt{6})$ が同一直線上にあるとき, a の値を求めよ。
- (4) (3) において, さらに点 $A(\alpha), B(\beta), D(\sqrt{6})$ が正三角形の3つの頂点となるとき, b の値を求めよ。

4 次の問に答えよ。

(1) 等式 $(\tan \theta)' = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ を示せ。また、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ の値を求めよ。

(2) 等式

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$$

を示せ。また、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta$ の値を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta$ の値を求めよ。